

Matemáticas I

(Parte 1)

Modelo B

28 de enero de 2012

Apellidos: _____ Nombre: _____

Resuelve las siguientes cuestiones en el espacio reservado para ello.

1. Calcula el resto al dividir por 7 del número $47839 \times 87232 + 67217^2$.
2. Calcula $460057_{(8)} - 254365_{(8)}$.
3. Encuentra todos los números primos mayores que 220 y menores que 240.
4. Sabiendo que $10000000980 = 11507480 \times 869 + 860$, ¿cuál es el cociente y el resto de dividir 10000000990 entre 869?
5. Calcula $\frac{\frac{8}{7} : \frac{5}{2} - \frac{12}{5}}{\frac{3}{5} - \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5} + 1}$, dando el resultado como fracción irreducible.

Sigue a la vuelta

6. Calcula de forma exacta $1\overline{18} - 1\overline{16}$, expresando el resultado en forma de fracción irreducible.
7. Expresa en base 10 el mayor número que se puede escribir con 8 dígitos en base 2.
8. Tenemos dos grupos de leñadores. Si el primer grupo tala 100 árboles en 40 horas, el segundo grupo tiene el doble de leñadores y todos trabajan a la misma velocidad, ¿cuánto tiempo tardará el segundo grupo en talar 60 árboles?
9. El precio de venta al público se calcula sumando al precio sin impuestos el IVA correspondiente. Si las facturas de hotel están gravadas con el 10 % de IVA y pagué 94'60 euros por una factura de alojamiento, ¿cuánto pagué de IVA?
10. ¿Cuántos de los divisores del número 13475 son múltiplos de 5?

Puntuación: Todas las preguntas puntúan por igual. A esta parte del examen le corresponde el 50 % de la nota total.

Matemáticas I

(Parte 2)

Modelo B

28 de enero de 2012

1. Este problema debe resolverse **sin utilizar álgebra**.

En un concierto durante la primera hora se cubrió el 20 % del aforo, durante la segunda hora entraron 400 personas, y en la última hora se cubrió la mitad del resto de aforo. Si quedaron libres 500 plazas, ¿cuál era el aforo del concierto?

Si por cada 2 chicas que asistían había 3 chicos, y el concierto le gustó a 6 de cada 10 chicas y al 45 % de los chicos, ¿a qué porcentaje de asistentes le gustó el concierto?

2. Las contraseñas de un sistema informático son cadenas de 8 caracteres con las siguientes restricciones:

- a) un carácter es un dígito del 0 al 9.
 - b) otro es uno de los siguientes caracteres no alfanuméricos: = ? _ * + @
 - c) el resto son vocales (minúsculas).
- i) ¿Cuántas contraseñas existen?
 - ii) ¿Cuántas contraseñas empiezan por una vocal número o terminan por un carácter no alfanumérico?

3. Un centro de transmisiones emite tres señales distintas. La del primer tipo, cada 28 segundos, la del segundo tipo, cada 70 segundos, y la del tercer tipo cada 294 segundos. Sabiendo que a las 12:00 coincidieron las tres,

- i) ¿cuántas veces coinciden entre las 12:00 y las 20:00?
 - ii) si empiezo a sintonizar las señales a las 20:00 ¿a qué hora las veré coincidir por primera vez?
4. Luis es funcionario y en el año 2011 ingresó un total de 28550 euros. Si el año 2008 le subieron el sueldo un 4 %, el año 2009 se lo subieron un 3 %, y el año 2010 se lo bajaron un 7 %, ¿cuál era su sueldo antes de la primera de las subidas?
5. Encuentra todos los números de la forma $974x8y$ que cumplan estas tres condiciones a la vez: (a) tiene resto 3 al dividir por 5; (b) es par; (c) no es divisible por 3.
6. Luis salió de su casa a las 8:40, andando hacia el colegio. Iba andando, a velocidad constante, hasta que a las 8:45, cuando pasaba por delante de la tienda de caramelos, se dio cuenta de que se había olvidado el bocadillo. Volvió corriendo a su casa, recogió el bocadillo, y a las 8:50 volvía a pasar por delante de la tienda de caramelos. Dejó de correr, y siguió andando hasta las 8:55, cuando se dio cuenta de que iba a llegar tarde, de manera que hizo un último esfuerzo y volvió a echar a correr, para conseguir llegar a las 9 a su colegio. Dibuja una gráfica que represente la distancia de Luis hasta su casa, en función de la hora.

Puntuación: $(10+10)+(10+10)+(10+5)+15+15+15$. A esta parte del examen le corresponde el 50 % de la nota total.

Matemáticas I

(Parte 1)

Modelo A

12 de junio de 2012

Apellidos: _____ Nombre: _____

Resuelve las siguientes cuestiones **en el espacio reservado para ello.**

1. Tengo en un depósito con 450 litros de refresco. ¿Cuántas botellas de $5/8$ de litro podré llenar?

Sol: $450 : \frac{5}{8} = 720$

2. ¿Cuál es el menor número de 8 cifras que es par y que da resto 3 al dividir por 5?

Sol: Los números que tienen resto 3 al dividir por 5 terminan en 3 o en 8. Como es par, debe terminar en 8. Por tanto, la respuesta es 10000008.

3. Ves un astronauta que aterriza un miércoles a las 8 de la tarde, y te cuenta que su viaje ha durado exactamente 900 horas. ¿Qué día de la semana y a qué hora empezó su viaje?

Sol: $900 = 37 \times 24 + 12$ y $37 = 5 \times 7 + 2$. Por tanto, el astronauta salió 5 semanas, 2 días y 12 horas antes. Eran las 8 de la mañana de un lunes.

4. Un grupo de 12 personas lleva provisiones de agua suficientes para 20 días. En el último momento, 3 personas más se unen al grupo. ¿En qué proporción deben reducir el consumo de agua por persona y día para tener agua suficiente para los mismos 20 días?

Sol: Como el número de días no cambia, podemos ignorarlo. Se cumple que $12 \cdot r = 15 \cdot r_1$ (donde r es el consumo al principio, y r_1 el consumo con las 15 personas). Por tanto, r y r_1 son inversamente proporcionales, y $r_1 = \frac{4}{5}r$, es decir, deben reducir el consumo en $1/5$.

5. Sabiendo que $8888888884302 = 1119789479 \times 7938$, ¿cuál es el cociente y el resto de dividir 8888888894302 entre 7938?

Sol: la diferencia entre los dividendos es 10000. Es suficiente hacer la división $10000 = 1 \times 7938 + 2062$ para deducir que el nuevo cociente es 1119789480 y el resto 2062.

Sigue a la vuelta

6. ¿Cuántos divisores pares tiene el número 61740?

Sol: $61740 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$. El divisor es par si utiliza al menos un 2. Por tanto, hay $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ divisores pares.

7. Completa los recuadros en la siguiente suma de dos números en base 8.

$$\begin{array}{r}
 5 \quad \boxed{6} \quad 2 \quad 6 \quad \boxed{5} \quad (8) \\
 + \quad \boxed{5} \quad 2 \quad \boxed{1} \quad 3 \quad 4 \quad (8) \\
 \hline
 1 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \quad \boxed{2} \quad 1 \quad (8)
 \end{array}$$

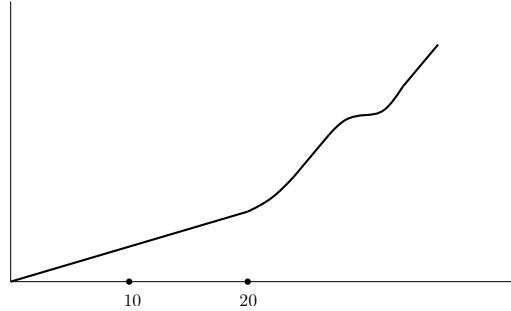
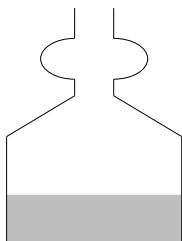
8. ¿Qué es mayor, el 68 % de 37 o el 37 % de 68?

Sol: Son iguales $\frac{68 \cdot 37}{100} = \frac{37 \cdot 68}{100}$

9. Efectúa las siguientes operaciones, dando el resultado como fracción irreducible.

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{5} : \frac{2}{7}}{1 + \left(\frac{17}{8} - 2\right)} = -\frac{256}{135}$$

10. La figura muestra una vasija que se está llenando de agua con un grifo de caudal constante. Si en la figura se muestra el estado de la vasija a los 10 segundos de haber abierto el grifo, haz un bosquejo de la gráfica que representa la altura del líquido en función del tiempo transcurrido.



Puntuación: Todas las preguntas puntuán por igual. A esta parte del examen le corresponde el 50 % de la nota total.

Apellidos: _____

NOTAS				
P1	P2	P3	P4	P5

Nombre: _____

Matemáticas I

(Parte 2)

12 de junio de 2012

Importante: debéis **explicar** adecuadamente las resoluciones de los problemas.

1. Demuestra que entre 3 números impares consecutivos siempre hay exactamente uno que es múltiplo de 3.

Solución: Daremos dos posibles pruebas válidas:

- 1) Sabemos que los números impares son de la forma $2n + 1$ con n un número natural, así tres números consecutivos son $2n + 1$, $2n + 3$ y $2n + 5$. Pues bien, si n es múltiplo de 3, entonces $2n + 3$ es múltiplo de 3. Si $n = 1$ (mód 3) (es decir, al dividir n por 3 el resto sale 1 [$n = 1 + 3k$]), entonces $2n + 1 = 3 + 6k$ es múltiplo de 3, la última posibilidad es que $n = 2$ (mód 3) (es decir, al dividir n por 3 el resto sale 2 [$n = 2 + 3k$]), entonces $2n + 5 = 9 + 6k$ es múltiplo de 3.
- 2) Otra posibilidad consiste en decir que como dado 3 números consecutivos uno es múltiplo de 3 pues entre un múltiplo de 3 y el siguiente hay 3 unidades de distancia, lo mismo sucede si tomamos 3 impares consecutivos, 3 números pares consecutivos, entre otras posibilidades.

2. Este problema se debe hacer **sin utilizar álgebra**.

Un profesor corrigió la tercera parte de los exámenes el lunes, el martes corrigió $2/5$ de los que le faltaban, y el miércoles sólo pudo corregir la mitad que el martes. Si el jueves terminó la tarea corrigiendo 56 exámenes, ¿cuántos alumnos hicieron el examen?

Solución: El lunes corrigió $1/3$ parte, así le quedaban $2/3$ parte. El martes de esas $2/3$ partes, corrigió las $2/5$ partes, y el miércoles corrigió la mitad de esta cantidad, o sea, $1/3 \times 2/5$ partes del total luego lo que le queda son las $4/15$ partes del total que resultan ser 56, por tanto había 210 exámenes.

Al poner las notas por grupos, comprobó que en el grupo *A* por cada 4 alumnos aprobados había 2 suspendidos, mientras que en el grupo *B* habían aprobado 5 de cada 7 alumnos. Si el 40 % de los alumnos iban al grupo *A* y el resto al grupo *B*, ¿cuál fue el porcentaje total de alumnos aprobados?

Solución: Si el 40 % de los estudiantes están en el grupo *A* y de cada 6 estudiantes 4 aprueban (y 2 suspenden) y el 60 % de los estudiantes están en el grupo *B* y de cada 7 estudiantes 5 aprueban (y 2 suspenden) entonces el porcentaje de los estudiantes que aprueban es:

$$\frac{40}{100} \frac{4}{6} + \frac{60}{100} \frac{5}{7} = \frac{73}{105} \approx 69,52\%$$

3. En el parque de atracciones me informan de que el viaje de la montaña rusa dura 4 minutos, y hay 5 minutos de pausa entre dos viajes. En otra atracción, el “Star flyer”, los viajes duran 7 minutos, y hay 5 minutos de pausa entre dos viajes. Sabemos que el primer viaje de las dos atracciones fue a las 11 h.
- a) ¿Cuántos viajes hizo la montaña rusa hasta la hora de cierre, las 22 h?
 - b) ¿Cuántas veces empezaron a la vez las dos atracciones durante ese día?
 - c) Si un visitante llega al parque a las 18 h, ¿cuándo ve por primera vez a las dos atracciones empezando en el mismo momento?

Solución:

- a) Hace un viaje cada 9 minutos. Como $660 : 9 = 73,33$, en 11 horas ha habido 74 viajes, contando el primero y el último. (Nota: he considerado 73 como respuesta correcta).
- b) Hay un viaje del Star flyer cada 12 minutos. Por tanto, coinciden cada $\text{lcm}(12, 9) = 36$. Como $660 : 36 = 18,33$, en total coinciden 19 veces. (Nota: he considerado 18 como respuesta correcta).
- c) Entre 11 y las 18 h. han pasado 420 minutos. Como $420 = 11 \cdot 36 + 24$, hay un viaje a las $17 : 36$ ($36 = 60 - 24$), y el primero que ve es a las $18 : 12$.

4. a) ¿Cuántos números de 5 cifras son capicúas?
b) ¿Cuántos números de 5 cifras son pares o empiezan por 3 (o ambas cosas)?

Solución:

- a) ¿Cuántos números de 5 cifras son capicúas?

De izquierda a derecha, hay 9 opciones para la primera cifra, 10 para la segunda y 10 para la tercera. Por tanto, hay $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números capicúas de 5 cifras.

- b) ¿Cuántos números de 5 cifras son pares o empiezan por 3 (o ambas cosas)?

Solución:

Considera los conjuntos

$A \equiv$ “números que son pares”

$B \equiv$ “números que empiezan por 3”.

Se tiene que

$$|A| = 5 \cdot 9 \cdot 10^3$$

$$|B| = 10^4$$

$$|A \cap B| = 5 \cdot 10^3$$

Según el principio de inclusión-exclusión,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50000$$

5. Encuentra todos los números de la forma $ab1a$ que son múltiplos de 9 y que tienen resto 3 al dividir por 4.

Solución: el número en base 10 es $ab1a = 1000a + 100b + 10 + a$, por tanto dicho número es múltiplo de 9 si

$$a + b + 1 + a = 2a + b + 1 = 0 \pmod{9},$$

Asimismo si al dividir por 4 el resto sale 3, entonces

$$2 + a = 3 \pmod{4}.$$

Luego por la segunda condición ha de ser $a = 1$, $a = 5$ y $a = 9$; luego teniendo en cuenta la otra condición resultan: $a = 1$, $b = 6$ (número 1611), $a = 5$, $b = 7$ (número 5715), y $a = 9$, $b = 8$ (número 9819).

Puntuación: Todos los problemas puntuán por igual. A esta parte del examen le corresponde el 50 % de la nota total.