2do examen (Semana 17-21 diciembre 2012)

Apellidos, Nombre: Tiempo: 90 minutos

IMPORTANTE: El no entregar esta hoja firmada conlleva un suspenso inmediato del presente examen

Ejercicio 1 (5 puntos)
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz de la aplicación respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(a) Determinar los valores de a para los que la matriz A es diagonalizable.

(b) Obtener la dimensión, bases y unas ecuaciones implícitas del Núcleo de f ($\ker f$) y de la Imagen de f.

(c) Para $a = 3$ encontrar matrices D diagonal y P inversible tales que $A = PDP^{-1}$. Como aplicación calcular e^{3A}.

Solución: Es claro que los autovalores son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = a$. Por tanto:

(a) -) Si $a \neq 3, 5$ la matriz A tiene 3 autovalores distintos y es diagonalizable.
-) Si $a = 3$ entonces $\lambda_1 = 5$ simple, $\lambda_2 = 3$ doble y será diagonalizable si

$$m_g(3) = 2 = 3 - \text{rango}(A - 3\mathbb{I})$$

Y como

$$A - 3\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces A es diagonalizable. Finalmente
-) Si $a = 5$ entonces $\lambda_1 = 5$ doble, $\lambda_2 = 3$ simple y será diagonalizable si

$$m_g(5) = 2 = 3 - \text{rango}(A - 5\mathbb{I}).$$

Y dado que

$$A - 5\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pues $m_g(5) = 1$ y A **no** es diagonalizable.

(b) Para analizar la imagen primero vemos cuando A es inversible, que sucede si $a \neq 0$, o sea,
-) Si $a \neq 0$ entonces $\text{Img}(f) = \mathbb{R}^3$ luego tiene dimensión 3 y unas ecuaciones implícitas son $\{0 = 0$ mientras que el núcleo tiene dimensión 0, $\ker(f) = \{\emptyset\}$ y unas ecuaciones implícitas son

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

-) Si $a = 0$ entonces las tres columnas de A son linealmente dependientes y, de hecho,

$$\text{Img}(f) = L((3,0,0)^T, (2,5,0)^T),$$

teniendo como unas ecuaciones implícitas $\{z = 0$.
Mientras que el núcleo de f tiene como ecuaciones implícitas (no todas tienen porque ser independientes, hay que comprobarlo)

$$A(x,y,z)^T = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 6z = 0 \\ 5y + 6z = 0 \end{array} \right.$$

que son linealmente independientes y una base de $\ker(f)$ es $\{(6,6,-5)^T\}$, y por tanto tiene dimensión 1.

(c) Como sabemos que para $a = 3$ es diagonalizable por (a) calculamos D y P, siendo

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(el cálculo de P se ha excluido pero es un mero ejercicio. Por tanto

$$e^{3A} = Pe^{3D}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3\times 5} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3\times 3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3\times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{3A} = \begin{pmatrix} e^9 & e^{15} - e^9 & 3(e^{15} - e^9) \\ 0 & e^{15} & 3(e^{15} - e^9) \\ 0 & 0 & e^9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (5 puntos)
Resolver la siguiente ecuación diferencial con valores iniciales

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} u(t), \qquad u(0) = (1,0,0)^T,$$

siendo v^T el vector traspuesto de v. Sabemos que la solución del problema de Cauchy es $u(t) = e^{At}u(0)$, es decir todo gira en torno al cálculo de e^{At}, y para ello debemos diagonalizar A. Sabemos que los autovalores son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, y $\lambda_3 = -1$ simples y por tanto es diagonalizable. Siendo

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la solución es

$$u(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} - e^t \\ (e^t - e^{-t})/2 \end{pmatrix}.$$