T: 2 horas

Dpto. Física y Matemáticas

27/11/2013	Cálculo I	Curso 2013-14	**Ex. Parcial**
Apellidos:	Nombre:	Grupo:	

1. Calcular la longitud de la curva

$$y = \log(\sec x),$$

en el intervalo $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Respuesta:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx = \log(\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}))\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = -\log(\tan(\frac{\pi}{8})) = -\log(\sqrt{2}-1).$$

2. Calcular la integral:

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx.$$

Respuesta:

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx = \log(\sin x - \cos x) + \text{Cte}.$$

3. Calcular la integral:

$$\int 2x \arctan\left(\frac{-1}{x}\right) dx.$$

Respuesta: Aplicando integración por partes

$$\int 2x \arctan\left(\frac{-1}{x}\right) dx = x^2 \arctan\left(\frac{-1}{x}\right) - \int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$$

e integrando esta última se tiene

$$\int 2x \arctan\left(\frac{-1}{x}\right) dx = x^2 \arctan\left(\frac{-1}{x}\right) - x + \arctan(x) + \text{Cte}.$$

4. Calcular la convolución de:

$$x(t) = e^{-t}u(t+3), \quad \text{y} \quad h(t) = (t-1)u(-t).$$

Respuesta:

$$(x(t) * h(t))(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)h(\lambda-\sigma)\, d\sigma = \int_{-3}^{\infty} e^{-\sigma}(\lambda-\sigma-1)u(-\lambda+\sigma)\, d\sigma.$$

Dado que el salto es hacia la derecha, tenemos que distinguir dos casos:
a) Si $\lambda < -3$ entonces

$$(x(t) * h(t))(\lambda) = \int_{-3}^{\infty} e^{-\sigma}(\lambda-\sigma-1)\, d\sigma = e^3(1+\lambda).$$

a) Si $\lambda > -3$ entonces

$$(x(t) * h(t))(\lambda) = \int_{t}^{\infty} e^{-\sigma}(\lambda-\sigma-1)\, d\sigma = -2e^{-\lambda}.$$

pot tanto

$$(x(t) * h(t))(\lambda) = e^3(1+\lambda) - u(\lambda+3)(2e^{-\lambda} + e^3(1+\lambda)).$$