1. Usando las propiedades de la Transformada de Laplace, demostrar que:

$$\int_0^\infty e^{-2t}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt = \frac{1}{4}\log(2),$$

donde log es el logaritmo neperiano.

Respuesta:

$$\int_0^\infty e^{-2t}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt = \mathscr{L}(\tfrac{\sin^2 t}{t})(2).$$

Para calcularlo lo haremos por pasos:

$$\mathscr{L}(\sin^2 t)(s) = \frac{1}{2}\mathscr{L}(1-\cos(2t))(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{4+s^2}\right),$$

por tanto

$$\mathscr{L}(\tfrac{\sin^2 t}{t})(s) = \tag{1}$$

$$= \int_s^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma}{4+\sigma^2}\right) d\sigma = \left(\frac{1}{2}\log(\sigma) - \frac{1}{4}\log(4+\sigma^2)\right|_{\sigma=s}^{\sigma=\infty} \tag{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma}{\sqrt{4+\sigma^2}}\right)\right|_{\sigma=s}^{\sigma=\infty} = -\frac{1}{2}\log(s) + \frac{1}{4}\log(4+s^2). \tag{3}$$

Si sustituimos $s=2$ obtenemos el resultado

$$\int_0^\infty e^{-2t}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt = -\frac{1}{2}\log(2) + \frac{1}{4}\log(4+4) = -\frac{1}{2}\log(2) + \frac{3}{4}\log 2 = \frac{1}{4}\log 2.$$

2. Resolver la ecuación:

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = \sin(t)u(t-\frac{\pi}{2}) \\ x'(0) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Respuesta: Aplicamos en primer lugar las propiedades de la transformada de Laplace a las funciones del problema obteniendo si $X(s) = \mathscr{L}(x(t))(s)$:

$$\mathscr{L}(x''(t))(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - s.$$

Por tanto nuestra ecuación diferencial se transforma en

$$s^2X(s) - s + X(s) = \mathscr{L}(\sin(t)u(t-\tfrac{\pi}{2}))(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}.$$

Luego

$$X(s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{(s^2+1)^2},$$

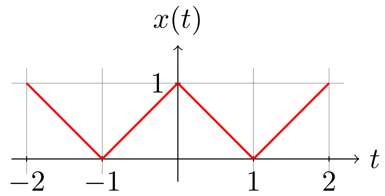
con esto deducimos que

$$x(s) = \cos t - \frac{1}{2}(t-\tfrac{\pi}{2})\cos(t)u(t-\tfrac{\pi}{2}).$$

3. Dada la señal periódica $x(t) = 1 - |t+2| + (|t+2| - |t|)u(t+1) + (|t| - |t-2|)u(t-1)$ en $-2 < t < 2$,

a) Representa gráficamente y escribirla en forma explícita.
b) Calcular su serie de Fourier.

Respuesta: Teniendo en cuenta la función valor absoluto se tiene a)



Así la función viene dada por

$$x(t) = \begin{cases} -t-1, & -2 < t < -1 \\ t+1, & -1 < t \leq 0 \\ -t+1, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

b) Por tanto el período es $T = 2$, luego $\omega_0 = \pi$, y además es una función simétrica par, así $b_k = 0$ para todo k. Por otro lado,

$$a_0 = 2\int_0^1 x(t)\,dt = 2\int_0^1 (1-t)\,dt = 1,$$

y

$$a_k = 2\int_0^1 x(t)\cos(k\pi t)\,dt = 2\frac{1-\cos(k\pi)}{k^2\pi^2} = 2\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}.$$

Luego,

$$\mathscr{F}(x(t)) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi t).$$