Convocatoria de Junio (18 de Junio de 2014) **Tiempo:** 2 horas y 30 minutos

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$f(x, y, z, t) = (x - z + t, 2x - y + z - t, 3z - t).$$

Se pide:

(a) (1 p.) Hallar la matriz coordenada de f respecto a las base

$$\{(1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 2, 0)\}$$

de $\mathbb{R}^4$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) (1 p.) *Usando la matriz coordenada hallada en el apartado a)*, hallar $f(2, 0, 1, 3)$.

(c) (1 p.) Hallar una base del subespacio $\mathrm{Ker}(f)$ (núcleo de f).

2. Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix},$$

que depende del parámetro real a.

(a) (1.25 ptos.) Estudiar, según los valores de a, cuándo la matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

(b) (0.75 ptos.) Para el caso en que $a = 2$, encontrar matrices D (diagonal) y P (inversible) tales que $D = P^{-1}AP$

3. (2 ptos.) Resolver el siguiente problema de valor inicial no homogénero:

$$u' = Au + B(t),$$
$$u(0) = (1, 2)^T$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} -5e^{4t} \\ 5e^{4t} \end{pmatrix}.$$

4. Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ (donde consideramos el producto escalar usual) que tiene por sistema generador

$$\{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, -2)\}.$$

Se pide:

(a) (1 p.) Hallar una base del complemento ortogonal $U^\perp$ de U.

(b) (1 p.) Hallar la proyección del vector $b = (1, 1, 0, -1)$ sobre U.

5. (1 p.) Dad la función booleana

$$f(\omega, x, y, z) = \omega x + \overline{y}\,\overline{z},$$

se pide hallar, *a partir de su tabla de valores*, su forma normal disyuntiva y su forma normal conjuntva.

Solución

1. (a)

$$M(\mathcal{B},\mathcal{B}_c;f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -1 & 6\end{pmatrix}.$$

(b) Como $(2,0,1,3)=(2,3,3,-1/2)_{\mathcal{B}}$, entonces

$$f(2,0,1,3)=M(\mathcal{B},\mathcal{B}_c;f)(2,3,3,-1/2)^T=(4,2,0).$$

(c) Ker(f)=$\mathcal{L}((-2,12,1,3))$.

2. (a) $\sigma(A)=\{2a,1+a,a\}$, por tanto: Si $a\neq 0,1$ entonces A s diagonalizable (3 autovalores distintos). Si $a=0$ entonces $m_a(0)=2$ pero $m_g(0)=1$ luego no es diagonalizable. Si $a=1$ entonces $m_a(1)=2$ pero $m_g(1)=1$ luego no es diagonalizable.

(b)

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

3.

$$u(t)=Pe^{Dt}P^{-1}u(0)+Pe^{Dt}\int_0^t e^{-Dz}P^{-1}B(z)\,dz$$

donde

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix} -1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Es decir

$$u(t)=\begin{pmatrix} e^{4t}\\ 2e^{4t}\end{pmatrix}.$$

4. (a) $U^{\perp}=\mathcal{L}((0,1,0,0),(2,0,-2,1))$.

(b) $\mathrm{Proy}_U(b)=(7/9,0,2/9,-10/9)$.

5. La tabla de valores es:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ω	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1

Luego la formal normal disyuntiva de f es igual a $\sum m(0,4,8,12,13,14,15)$, es decir

$$f(\omega,x,y,z)=\overline{\omega}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{\omega}\,x\,\overline{y}\,\overline{z}+\omega\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\omega\,x\,\overline{y}\,\overline{z}+\omega\,x\,\overline{y}\,z+\omega\,x\,y\,\overline{z}+\omega\,x\,y\,z.$$

Luego la formal normal conjuntiva de f es igual a $\prod M(1,2,3,5,6,7,9,10,11)$, es decir

$$\begin{aligned}f(\omega,x,y,z)=\;&(\omega+x+y+\overline{z})(\omega+x+\overline{y}+z)(\omega+x+\overline{y}+\overline{z})(\omega+\overline{x}+y+\overline{z})\\ &\times(\omega+\overline{x}+\overline{y}+z)(\omega+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})(\overline{\omega}+x+y+\overline{z})(\overline{\omega}+x+\overline{y}+z)(\overline{\omega}+x+\overline{y}+\overline{z}).\end{aligned}$$