18/05/2016	Cálculo Numérico y Estadística Aplicada	Curso 2015-16	**Parcial**
Apellidos:		Nombre:	N° :

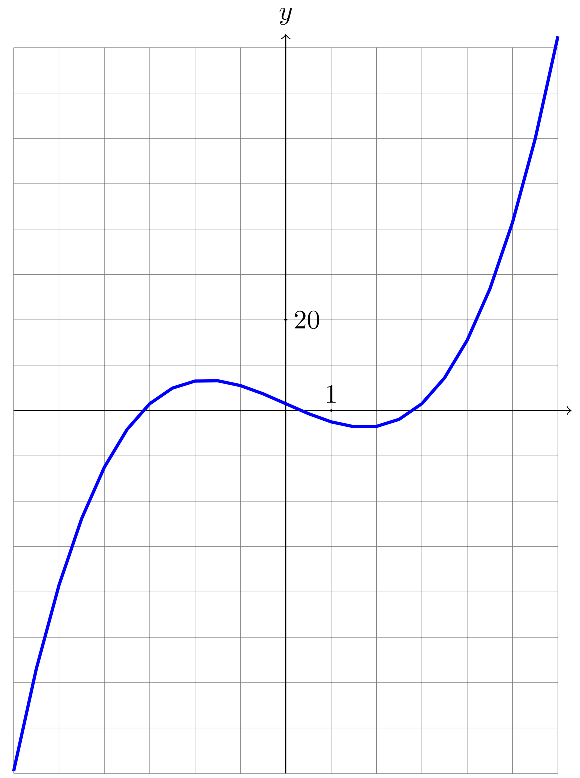
Lea detenidamente estas instrucciones antes de comenzar el examen:

- La duración de la prueba será de 2 horas.
- No se permitirá el uso de calculadoras personales de ningún tipo.
- Apague o ponga en silencio su teléfono móvil. Gracias.
- El único programa válido para resolver los problemas es `octave`.
- Todos los ejercicios deben justificarse.

Problema 1 Sea la función

$$f(x) = x^3 - 9x + 3.$$

(a) **(0,5 puntos)** Haga un esbozo de la gráfica de la función y determine cuántas raíces tiene.




```
>function fout=f(x)
>fout=x.^3-9*x+3;
>endfunction
>xx=-6:0.1:6;
>yy=f(xx);
>plot(xx,yy)
```

código octave

(b) **(1 punto)** Encuentre intervalos de números enteros **consecutivos** que contengan cada raíz de f. [-4,-3], [0,1], [2,3]. Cada intervalo esta limitado por dos enteros consecutivos.

Problema 2 Dada la ecuación polinómica

$$3x^3 + x + 2 = 0.$$

(a) **(1 punto)** Justifique por qué tiene una única solución en el intervalo $[-1, 0]$. Al representarla vemos que si llamamos $f(x) = 3x^3 + x - 2$ entonces f es continua, $f(-1) = -2 < 0$, y $f(0) = 2 > 0$ por tanto dicha función tiene un cero en el intervalo (Teorema de Bolzano). Si tuviese otra entonces la derivada $f'(x) = 9x^2 + 1$ tendría que anularse en [0,-1] (Teorema de Rolle) pero eso no pasa. Luego tiene solo una ráiz.

(b) **(1 punto)** Formule un algoritmo (en `octave`) que permita calcular mediante el método de Newton-Raphson las raíces de una determinada ecuación en un intervalo dado, con un valor inicial x_0 dado y con un número mínimo de cifras significativas, cs, establecido previamente.

Una versión del programa sería:

```
>function iout=itera(x0,cs)
>err=1;
>while(err>5*10^(-cs))
>x1=x0-f(x0)/fd(x0);
>err=abs((x1-x0)/x0);
>x0=x1;
>end
>iout=x1;
>endfunction
```

En el programa f es la función dada y fd la derivada de la función dada.

(c) **(1 punto)** Justifique en base a la regla de Fourier si la elección de $x_0 = -1$ como valor inicial para las iteraciones del método de newton-Raphson, conduce necesariamente a una solución de la ecuación anterior en el intervalo $[-1, 0]$.

He representado la función y veo que f es creciente, y $f''(x) = 18x$ es negativa, por tanto he de empezar según la regla de Fourier en x_0 donde f en ese punto es negativo, es decir, $x_0 = -1$. Recuerde que $f(-1) < 0$.

(d) **(1 punto)** Partiendo del valor inicial $x_0 = -1$, determine la raíz de la ecuación anterior en el intervalo $[-1, 0]$ con, al menos, seis cifras significativas.

Tras aplicar el algoritmo anterior con $cs = 6$ obtenemos

$$-0'747415250395812$$

Y comprobamos que $f(ans) = -4'44089209850063e - 16$, luego está bien.

Problema 3 Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3,8x + 1,6y + 0,9z & = & 18 \\ -0,7x + 5,4y + 1,6z & = & -2 \\ 1,5x + 1,1y - 3,2z & = & -6 \end{array} \right.$$

(a) **(0,5 puntos)** Formule un algoritmo que permita calcular mediante el método de Jacobi la solución del sistema con un número mínimo de cifras significativas, cs, fijado previamente.

Una versión del programa sería:

```
>function iout=iteraJ(A,b,x0,cs)
>err=1;
>D=diag(diag(A)');        %% definimos la matriz diagonal como D
>R=A-D;                   %% el resto es R
>while(err>5*10^(-cs))
>x1=D\(b-R*x0);
>err=norm(x1-x0,2)/norm(x0,2);
>x0=x1;
>end
>iout=x1;
>endfunction
```

(b) **(0,5 puntos)** Trabajando en formato largo, determine empleando el algoritmo anterior la solución del sistema lineal con, al menos, cinco cifras significativas.

Ejecutamos el programa de la forma

```
>A=[3.8,1.6,0.9;-0.7,5.4,1.6;1.5,1.1,-3.2];
>b=[18:-2:-6];
>x0=[0;0;0];
>iteraJ(A,B,x0,5)
```

Y obtenemos

$$\vec{x}^* = (4'260027617657797,\ -0'876103443074275,\ 3'570801791760472).$$

Fe de Errata: en la ejecución de iteraJ, donde ponía c0 debe ser x0.

(c) **(0,5 puntos)** Calcule la solución exacta del sistema y obtenga el error relativo obtenido (use la norma 2).
La solución exacta es

$$\vec{x} = (4'260043207332759,\ -0'876134816868342,\ 3'570723910138738).$$

Y el error relativo obtenido es

$$\epsilon_r = \frac{\|\vec{x} - \vec{x}^*\|_2}{\|\vec{x}\|_2} = 1'51759513702328e - 05.$$

Problema 4 En la siguiente tabla quedan reflejadas las cantidades y (en gramos) de dicromato de potasio disuelto en 100 partes de agua sometida a una temperatura x (en grados centígrados):

y (gr.)	61, 5	62, 1	66, 3	70, 3
x (°C)	0, 0	10, 0	27, 4	42, 1

(a) **(1 punto)** Determine el polinomio de interpolación $y = P(x)$ para los datos anteriores.
Aplicando lo visto en teoría, dicho polinomio es

$$61'5 - 0.0430493504227363x + 0.0116499175908041x^2 - 0.000134498254853043x^3.$$

(b) **(0,5 puntos)** Para una temperatura de 25 grados, encuentre la cantidad, en gramos, de dicromato de potasio que proporciona la interpolación.
Aplicando lo visto en teoría, dicho valor es

$$p(25) = 65'6034295016053.$$

Problema 5 (1,5 puntos) Utilizando una división del intervalo $[-1, 2]$ en cuatro subintervalos, calcule, por medio del método de los trapecios, la integral definida

$$\int_{-1}^{2} e^{-x^2} dx.$$

Explique el proceso del cálculo de la integral y el algoritmo empleado.
Tomamos $a = -1$, $b = 2$, and $n = 4$, usando esto, se tiene que dicha área usando el método de los trapecios es:

$$\int_{-1}^{2} e^{-x^2} dx \approx \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + 2f(a+3h) + f(a+4h)\Big), \qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{4}.$$

Por tanto, usando octave se obtiene

```
function fout=f(x)
> fout=exp(-x.^2);
> endfunction
> X=-1:3/4:2;
> Y=f(X);
>3/8*(Y(1)+2*Y(2)+2*Y(3)+2*Y(4)+Y(5))
ans= 1'59069207979955
```

Calificación:

Ej.1	Ej.2	Ej.3	Ej.4	Ej.5	**TOTAL**