Dpto. Física y Matemáticas

T: 1 h 40 min

| 11/10/2016 | Cálculo I | Curso 2016-17 | **Parcial 1** |
|---|---|---|---|
| Apellidos: | | Nombre: | Grupo: |

**1. (4 puntos)** Estudie la convergencia de las siguientes series y calcule su suma cuando sea posible (geométrica y telescópica):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2-3n+2n^2+n^3}{2n^2+4n^3+2n^4}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n^2+1}{3n^2+2}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4\alpha]{n^7+n^4-1}}{\sqrt[9]{n^\alpha+1}}$

**Solución:** a) La serie puede compararse con la de término general $b_n = 1/(2n)$ que es divergente pues es la serie armónica de índice $p = 1$.
b) La serie puede compararse con la de término general $b_n = 1/(4n^2)$ que es convergente pues es la serie armónica de índice $p = 2$. Y puede sumarse (es telescópica) cuya suma es $1/6$, ya que

$$\frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{1/2}{2n+1} + \frac{-1/2}{2n+3}.$$

c) Si asumimos que $\alpha \geq 0$, entonces empleando el criterio de la raíz, se ve que para $\alpha < 3$ es convergente y para $\alpha \geq 3$ es divergente.
Y si se compara con una geométrica de razón $\alpha/3$ entonces para $|\alpha| < 3$ es convergente, y para $|\alpha| \geq 3$ divergente.
d) Al igual que los primeros apartados, comparando la serie con la que tiene como término general

$$b_n = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{9}-\frac{7}{4\alpha}}},$$

se tiene que el exponente es igual a 1 (la vamos a comparar con una armónica de índice $p > 1$), cuando

$$\frac{\alpha}{9} - \frac{7}{4\alpha} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = -\frac{3}{2},\ \alpha = \frac{21}{2},$$

luego converge para $\alpha > 21/2$, o $\alpha < -3/2$; diverge en el resto de casos.

**2. (2 puntos)** Dada la señal

$$x(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{8}t\right)\cos\left(\frac{t}{8}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}t\right).$$

a) Exprese la siguiente señal como suma y resta de funciones trigonométricas.

b) ¿Es dicha señal periódica? En caso afirmativo, calcule su período fundamental.

**Solución:** a) Basta usar trigonometría elemental, siendo igual a

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{5t}{4}\right) - \cos\left(\frac{9t}{4}\right) + \cos\left(\frac{3t}{2}\right) - \cos(2t)\right).$$

b) Sí, es periódica pues es producto de señales periódicas que no dan igual a una constante. Además usando la teoría vista en clase el período fundamental es $8\pi$. Mientras que si no se desarrolla el período obtenido (que no es el fundamental) es $16\pi$. Pues en este caso

$$T_1 = \frac{16\pi}{3},\ T_2 = 16\pi,\ T_3 = \frac{8\pi}{7} \ \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow T_{1,2} = T_2 = 16\pi,\ \frac{T_{1,2}}{T_3} = 14 \ \Rightarrow T = T_{1,2} = 16\pi.$$

**3. (4 puntos)** Dada la señal periódica

$$x(t) = |7t - t^2|\mathtt{u}(-t+8) - |t^2 - 9t|\mathtt{u}(t-8); \quad 7 < t < 9.$$

a) Calcule el período $T$ de la señal.

**A partir de ahora todo lo que se pide debe realizarlo en el intervalo** $(-T/2, T/2)$**.**

b) Represente la señal.

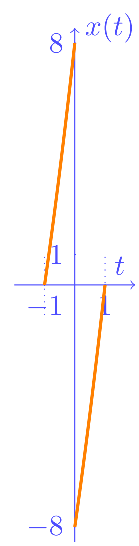
c) Calcule explícitamente la parte par de dicha señal y represéntela.

d) Dibuje la parte impar de la señal.

**Solución:** Dado que el intervalo donde está definida la función mide $L = 2$ y función en cuestión no tiene un período definido a priori, entonces $T = 2$.
b) Luego debemos representarla en $(-1, 1)$. De hecho, dado que $(9-1)/2 = 4$, entonces justo la señal que aparece en el intervalo pedido es la cuarta copia a la izquierda de la señal original. Peri si tenemos en cuesta la función valor absoluto y los escalones asociados a la función, entonces

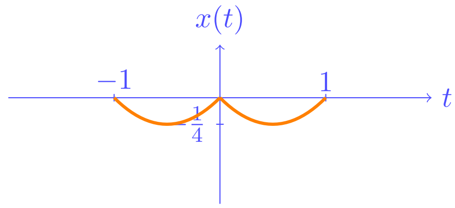
$$x(t) = \begin{cases} t^2 - 7t & 7 < t < 8 \\ t^2 - 9t & 8 < t < 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{cases} (t+8)^2 - 7(t+8) = (t+8)(t+1) & -1 < t < 0 \\ (t+8)^2 - 9(t+8) = (t+8)(t-1) & 0 < t < 1 \end{cases}$$

obteniéndose la grafica (en naranja, parece recta pero es una parábola) :



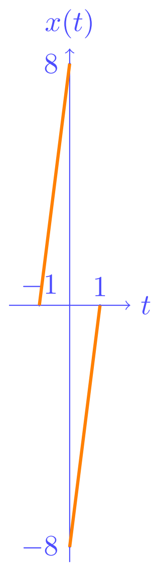
c) Así la parte par será

$$x(-t) = \begin{cases} t^2 - 9t + 8 & -1 < t < 0 \\ t^2 - 7t - 8 & 0 < t < 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Par}\{x(t)\} = \begin{cases} t^2 + t & -1 < t < 0 \\ t^2 - t & 0 < t < 1 \end{cases}$$




Por último solo se pide el dibujo de la parte impar, en este caso tambien es fácil la expresión de la función

$$\text{Impar}\{x(t)\} = \begin{cases} 8t + 8 & -1 < t < 0, \\ 8t - 8 & 0 < t < 1. \end{cases}$$



Dpto. Física y Matemáticas

T: 2 horas

| 14/10/2016 | Cálculo I | Curso 2016-17 | Parcial 1 |
|---|---|---|---|
| Apellidos: | | Nombre: | Grupo: |

**1. (4 puntos)** Estudiar la convergencia de las siguientes series y calcular su suma cuando sea posible:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{2n+2}3^{-n}, \quad a>0$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[7]{n^2+3}}{\sqrt{n^4+1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$

**Solución:** a) Esta serie es geométrica de razón $r=a^2/3$, y $a=a^2$, así si $r<1$ es convergente, es decir, si $0<a<\sqrt{3}$; y si $a>\sqrt{3}$ es divergente. La suma en el caso convergente es $a^4/(3-a^2)$.

b) Dado que el término general es comparable con $1/(n^{2-2/7})$ y $2-2/7>1$ entonces esta es una sere armónica de índice $p>1$, por tanto convergente y así las que nos dan es convergente por el criterio de comparación por paso al límite.

c) Igualmente esta serie es comparable con la armónica de índice $p=2>1$, así es convergente. Esta serie no podemos sumarla fácilmente.

d) Empleando el criterio del cociente se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}=0\,e^{-2}=0<1.$$

por tanto es convergente.

**2. (2 puntos)** Dada la señal

$$x(t)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}t\right)\cos\left(\frac{t}{12}\right)}{\sec\left(\frac{7}{4}t\right)}.$$

a) Exprese la siguiente señal como suma y resta de funciones trigonométricas.

b) ¿Es dicha señal periódica? En caso afirmativo, calcule su período fundamental. **Solución:**

a) Basta usar trigonometría elemental, sabiendo que $\sec(a)=1/\cos(a)$, entonces se tiene que

$$x(t)=\frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{8t}{3}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{5t}{6}\right)-\operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}\left(\frac{5t}{2}\right)\right).$$

b) Sí, es periódica pues es producto de señales periódicas que no dan igual a una constante. Además usando la teoría vista en clase el período fundamental es $12\pi$. Mientras que si no se desarrolla el período obtenido (que no es el fundamental) es $24\pi$. Pues en este caso

$$T_1=\frac{12\pi}{5},\ T_2=24\pi,\ T_3=\frac{8\pi}{7}\ \Rightarrow \frac{T_1}{T_2}=\frac{1}{10}\Rightarrow T_{1,2}=T_2=24\pi,\ \frac{T_{1,2}}{T_3}=21\ \Rightarrow T=T_{1,2}=24\pi.$$

**3.(4 puntos)** Dada la señal periódica

$$x(t) = |\cos(\pi t)|\mathtt{u}(-t+8) - |\mathrm{sen}(\pi t + 7\pi/2)|\mathtt{u}(t-8); \quad 7 < t < 9.$$

a) Calcule el período $T$ de la señal.

**A partir de ahora todo lo que se pide debe realizarlo en el intervalo** $(-T/2, T/2)$**.**

b) Represente la señal.

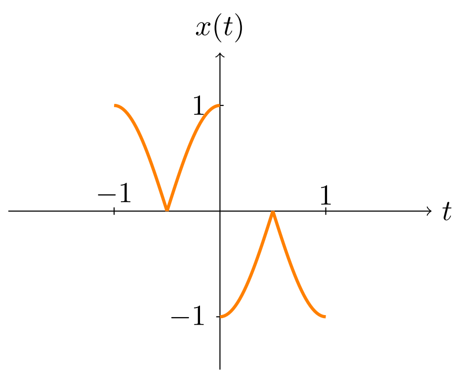
c) Calcule explícitamente la parte impar de dicha señal y represéntela.

d) Exprese la parte par de dicha señal como suma de saltos a la derecha.

**Solución:** a) Dado que en $(7,8)$ la función es positiva, y en $(8,9)$ es negativa, el período es el intervalo de la función que es 2. Teniendo en cuesta esto, se tiene que b) la función es

$$x(t) = \begin{cases} |\cos(\pi t)| & 7 < t < 8, \\ -|\cos(\pi t)| & 8 < t < 9, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{cases} |\cos(\pi(t+8))| = |\cos(\pi t)| & -1 < t < 0, \\ -|\cos(\pi(t+8))| = -|\cos(\pi t)| & 0 < t < 1, \end{cases}$$

Así la gráfica es:




c) Como la función es impar, entonces

$$\mathrm{Impar}\{x(t)\} = x(t).$$

d) Como la función es impar, entonces $\mathrm{Par}\{x(t)\} = 0$ excepto para $t = 0$.