T: 1 h 40 min

Dpto. Física y Matemáticas

22/11/2016	Cálculo I	Curso 2016-17	**Parcial 2**
Apellidos:	Nombre:		Grupo:

1. (4 puntos) Calcule las siguientes derivadas:

a) $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{\log(t)}}{t}$

b) $f(t) = (\text{sen}(t))^{t^2}$

c) $f(t) = \arcsin(\log(t)) + \dfrac{t^3}{\log(t)}$

d) $f(f(t))$ siendo $f(t) = \cos(2t)$.

Solución: a)

$$f'(t) = \frac{1/3(\log(t))^{-2/3} - (\log(t))^{1/3}}{t^2} = \frac{1 - 3\log(t)}{3t^2\sqrt[3]{\log^2(t)}}.$$

b)

$$f'(t) = t^2(\text{sen}(t))^{t^2-1}\cos(t) + (\text{sen}(t))^{t^2}\log(\text{sen}(t))2t = t(\text{sen}(t))^{t^2-1}\left(t\cos(t) + 2\text{sen}(t)\log(\text{sen}(t))\right).$$

c)

$$f'(t) = \frac{1}{t\sqrt{1-\log^2(t)}} + \frac{3\log(t) - 1}{\log^2(t)}t^2.$$

d)

$$\left(f(f(t))\right)' = (-2\text{sen}(\cos(2t)))(-2\text{sen}(2t)) = 4\,\text{sen}(\cos(2t))\,\text{sen}(2t).$$

2. (3 puntos) Dada la señal

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{15t^2+5}{5+t^3} & \text{si } 5 \geq t > 0, \\ \dfrac{1}{1+t^2} & \text{si } 0 \geq t \geq -5. \end{cases}$$

a) Calcule $x'(t)$ y estudie el crecimiento de la función en $[-5, 5]$.

b) Realice el estudio de la señal y obtenga, si existen, los extremos absolutos de la misma. Esboce la gráfica de la función.

Ayuda: La segunda derivada de la función en $[0, 5]$ se anula en $0'86$ y en $3'05$.

c) Calcule para $z \in [-5, -1]$ la integral

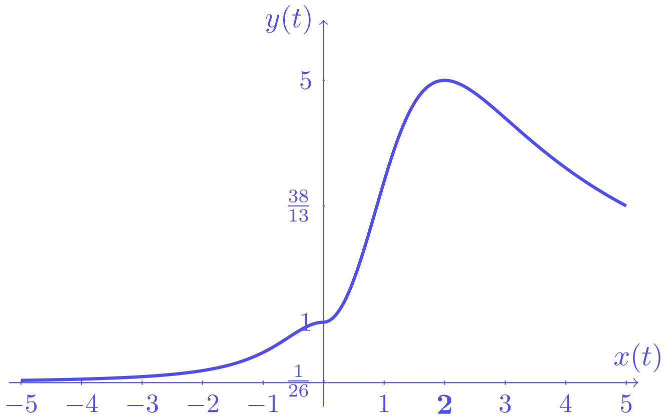
$$\int_z^{-1} x(t)\,dt.$$

Solución: a) La derivada de la señal es

$$x'(t) = \begin{cases} -\dfrac{15\left(t^4+t^2-10t\right)}{\left(t^3+5\right)^2} & \text{si } 5 \geq t > 0, \\ \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } 0 \geq t \geq -5. \end{cases}$$

Dado que $t^4 + t^2 - 10t = 0$ para $t = 0$, $t = 2$ y $t = -1 \pm 2\mathrm{j}$ (estas dos últimas complejas), así como el $t = 0$ está excluido en el primer caso $(0, 5]$, los puntos críticos son $t = 5$, $t = 2$ y $t = 0$; en el segundo caso $[-5, 0]$, $t = 0$ son puntos críticos $t = 0$ y $t = -5$. De hecho, dado que $x(-5) = 1/26$, $x(0) = 1$, $x(0^+) = 1$, $x(2) = 5$ y $x(5) = 38/13$, se tiene que $x(t)$ crece en $[-5, 2)$, y decrece en $(2, 5]$. **!ojo! hay que comprobar que $x(t)$ es derivable en $t = 0$, su derivada vale 0.**

b) La función es continua en $[-5, 5]$, derivable en (-5,5), y tiene un máximo local en $(2, 5)$, es fácil ver que en $[-5, 0]$ no hay puntos de inflexión y nos dicen que si que los hay en $(0, 5]$, por tanto la gráfica es



Por tanto el mínimo absoluto está en $(-5, 1/26)$ y el máximo absoluto está en $(2, 5)$.

c) Dado que $z < 0$ tenemos que

$$\int_z^{-1} x(t)\,dt = \arctan(t)\Big|_z^{-1} = \arctan(-1) - \arctan(z) = -\frac{\pi}{4} - \arctan(z).$$

3. (3 puntos) Calcule las siguientes integrales

a) (1 pto) $\displaystyle\int \frac{3t^4 + 4t^3 + 8}{t^2(t+2)^2\,(t^2 + 2t + 2)}\,dt$

b) (2 ptos) $\displaystyle\int \log(t)\arcsin(t)\,dt$

Solución: a)

$$\int \frac{3t^4 + 4t^3 + 8}{t^2(t+2)^2\,(t^2 + 2t + 2)}\,dt = A\log|t| - B\frac{1}{t} + C\log|t+2| - D\frac{1}{t+2} + \int \frac{Et + F}{t^2 + 2t + 2}\,dt.$$

En este caso $t^2 + 2t + 2$ tiene dos raíces complejas, que son $-1 \pm \mathrm{j}$, pot tanto $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1^2$, luego

$$\int \frac{Et + F}{t^2 + 2t + 2}\,dt = \int \frac{Et + F}{(t+1)^2 + 1^2}\,dt = \frac{E}{2}\int \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 2}\,dt + (F - E)\int \frac{1}{(t+1)^2 + 1^2}\,dt$$

que es igual a $E/2\log(t^2+2t+2)+(F-E)\arctan(t+1)+Cte.$
Si se cálculan las constantes, la integral completa es

$$\int \frac{3t^4+4t^3+8}{t^2(t+2)^2\,(t^2+2t+2)}\,dt = -2\log|t| - \frac{1}{t} - \frac{3}{t+2} + \log\left(t^2+2t+2\right) + \arctan(t+1) + Cte.$$

b) Esta integral se resolvio en clase y se hace por partes

$$\int \log(t)\arcsin(t)\,dt = \{u=\arcsin(t); dv=\log(t)dt\} = t\arcsin(t)(\log(t)-1) - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}(\log(t)-1)\,dt$$

De nuevo aplicamos integración por partes tomando $u=\log(t)-1$, $dv = t/\sqrt{1-t^2}\,dt$, obteniendose

$$\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}(\log(t)-1)\,dt = -(\log(t)-1)\sqrt{1-t^2} + \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,dt.$$

Aparece una integral irracional, tomamos el cambio $t=\text{sen}(z)$ así se tiene

$$\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,dt = \int \frac{\cos^2(z)}{\text{sen(z)}}\,dz = \{\cos^2(z) = 1-\text{sen}^2(z)\} = \log|\text{cotan}(z/2)| + \cos(z) + Cte.$$

Deshacemos el cambio $z=\text{arcsen}(t)$, siendo

$$\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,dt = \sqrt{1-t^2} - \log\left(\sqrt{1-t^2}+1\right) + \log|t| + Cte.$$

Juntamos todas las piezas y obtenemos la integral.

1. (4 puntos) Calcule las siguientes derivadas:

a) $f(t) = \log(\arctan(t)) + t$

b) $f(t) = t^{2\cos(t)}$

c) $f(t) = \dfrac{t^2 + \frac{1}{t}}{\cos(t)}$

d) $f(f(t))$ siendo $f(t) = \arctan(3t - 1)$

Solución: a)

$$f't(t) = \frac{1}{\arctan(t)(1+t^2)} + 1.$$

b)

$$f'(t) = 2\cos(t)t^{2\cos(t)-1} - 2t^{2\cos(t)}\log(t)\mathrm{sen}(t) = 2t^{2\cos(t)-1}\left(\cos(t) - t\log(t)\mathrm{sen}(t)\right).$$

c)

$$f'(t) = \frac{\left(2t - \frac{1}{t^2}\right)\cos(t) + (t^2 + \frac{1}{t})\mathrm{sen}(t)}{\cos^2(t)}.$$

d)

$$(f(f(t))' = \frac{9}{(1+\arctan^2(3t-1))(1+(3t-1)^2)}.$$

2. (3 puntos) Dada la señal

$$x(t) = t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 4t + 4.$$

a) Estudie la concavidad e indique, si los tiene, los puntos de inflexión de la señal. Realice un esbozo de la gráfica de la señal en el intervalo $[-5, 5]$.

b) Encuentre tres puntos distintos en los cuales la derivada en ellos valga lo mismo.

c) Encuentra una primitiva de la señal que en $t = 1$ tome el valor 1.

Solución: a) Para esta señal se tiene que $x'(t) = 4t^3 + 6t^2 - 6t - 4$, y $x''(t) = 6(2t^2 + 2t - 1)$, luego los puntos de inflexión son

$$PI_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \approx -1'366, \qquad PI_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0'366.$$

Y dado que es una parábola con coeficiente principal positivo, entonces es en $(-\infty, PI_1)$ convexa, en (PI_1, PI_2) concava, y en $(PI_2, +\infty)$ convexa.

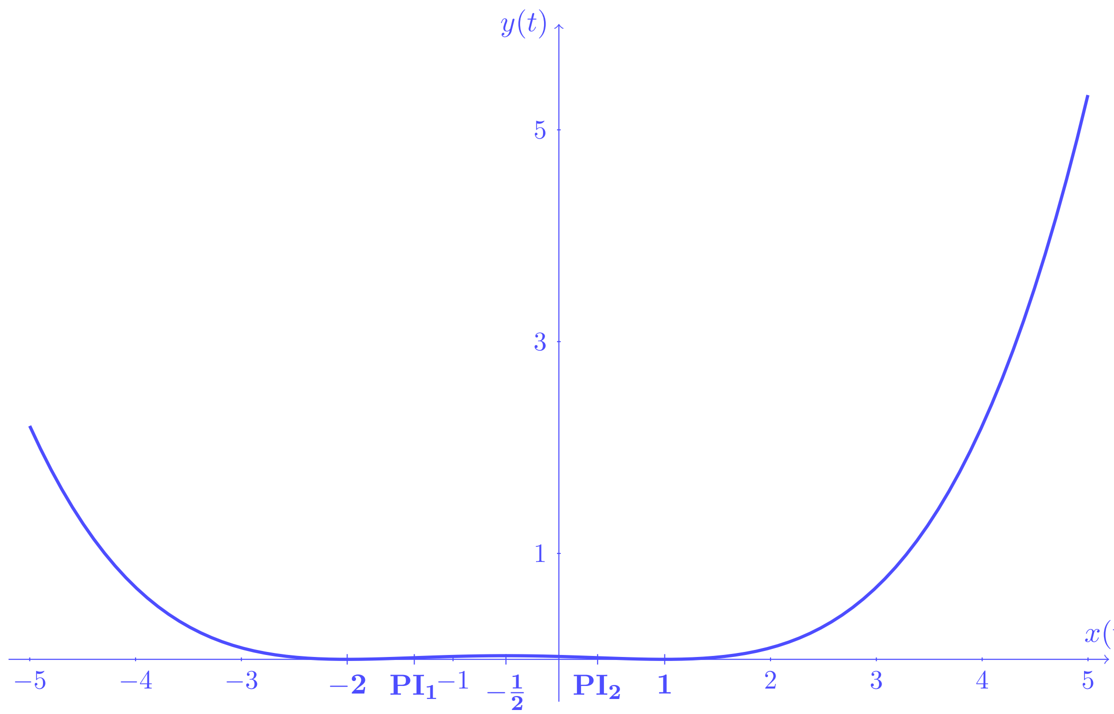
b) Como la derivada tiene grado 3, cualquier conjunto de soluciones de $x'(t) = \mathit{constante}$ tiene tres soluciones. En particular la ecuación $x'(t) = 0$ tiene como soluciones (puntos críticos de la señal)

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = -\frac{1}{2}.$$

Otra posibilidad es $x'(t) = -4$, la ecuación resulta $4t^3 + 6t^2 - 6t = 0$ que tiene soluciones

$$t = 0, \quad t = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}, \quad t = \frac{-3 - \sqrt{33}}{4}.$$

Una gráfica de la señal, dado que es un polinomio que se anula en $t = 1$ y $t = 2$ (dobles), así la gráfica es:



c) Una primitiva de esa función es

$$F(t) = \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{2} - t^3 - 2t^2 + 4t,$$

como tiene que valer $F(1) = 1$, entonces la primitiva buscada es

$$F(t) = \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{2} - t^3 - 2t^2 + 4t - \frac{7}{10}.$$

3.(3 puntos) Calcule las siguientes integrales:

a) (1.5 puntos)

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x) + 2\operatorname{sen}(x)}\, dx$$

b) (1.5 puntos)

$$\int t^{2016}(\log(t))^2, dt$$

Solución: a) Es una racional trigonométrica que no tiene simetría por tanto, se aplica el cambio genérico

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \quad t = \tan(x/2).$$

obteniendo

$$\int \frac{\text{sen}(x) + 3\cos(x)}{\text{sen}(x)\cos(x) + 2\text{sen}(x)}\,dx = \int \frac{-3t^2 + 2t + 3}{t(t^2+3)}\,dt$$

que es racional cuya solución es

$$A\log|t| + \frac{B}{2}\log(t^2+3) + \frac{C}{\sqrt{3}}\arctan(t/\sqrt{3}) + Cte,$$

$(A = 1,\ B(t) = 2 - 4t)$ y se deshace el cambio.

b) Se aplica intregración por partes dos veces quedando

$$\int t^{2016}(\log(t))^2, dt = \{u = \log^2(t)\} = \frac{t^{2017}\log^2(t)}{2017} - \frac{2}{2017}\int t^{2016}\log(t)\,dt.$$

$$\int t^{2016}\log(t)\,dt = \{u = \log(t)\} = \frac{t^{2017}\log(t)}{2017} - \frac{1}{2017}\frac{t^{2017}}{2017} + Cte.$$