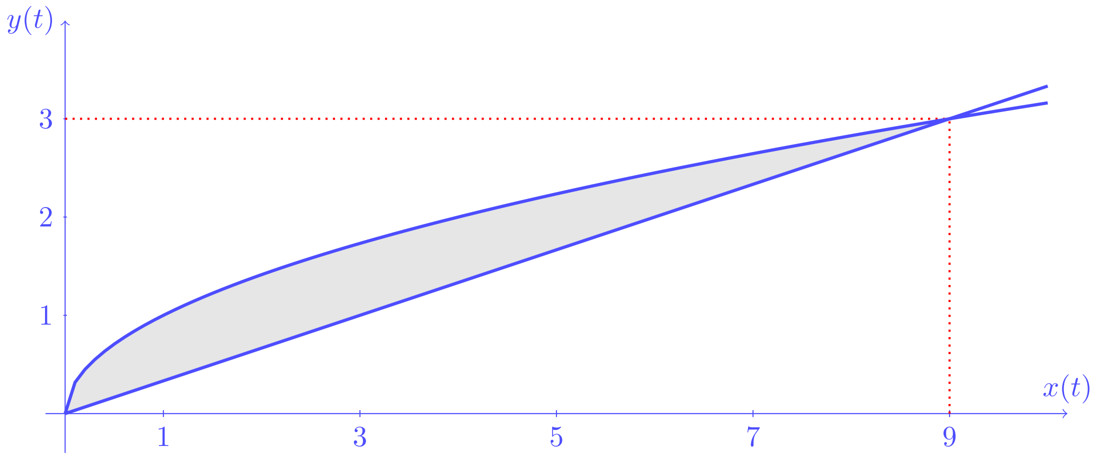
T: 1 h 40 min

Dpto. Física y Matemáticas

20/12/2016	Cálculo I	Curso 2016-17	**Parcial 3**
Apellidos:		Nombre:	Grupo:

1. (1'5 puntos) Sea R la región encerrada entre las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x/3$. Calcule el volumen de revolución de del sólido de revolución generado por R al girar sobre el eje OY.

Solución: La región R es de la forma (zona gris),



Así, aplicamos el método de los cilindros obteniendo

$$VR_{OY} = 2\pi \int_0^9 x(\sqrt{x} - x/3)\, dx = 2\pi \left(\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{x^3}{9} \right) \Bigg|_0^9 = \frac{162}{5}\pi.$$

2. (2 puntos) Calcule la convolución de las señales

$$x(t) = \operatorname{sen}(2t)\mathtt{u}(t-\pi), \qquad h(t) = \cos(3t)\mathtt{u}(t+3\pi).$$

Solución: En este caso

$$h(\sigma - t) = \cos(3(\sigma - t))\mathtt{u}((\sigma - t) + 3\pi) = \cos(3\sigma - 3t)\mathtt{u}(-t + \sigma + 3\pi).$$

Teniendo en cuenta ambas expresiones tenemos que considerar dos casos:
1) Si $\sigma + 3\pi < \pi$, entonces

$$(x(t) * h(t))(\sigma) = 0.$$

2) Si $\sigma + 3\pi > \pi$, entonces

$$(x(t) * h(t))(\sigma) = \int_\pi^{\sigma+3\pi} \operatorname{sen}(2t)\cos(3\sigma - 3t)\, dt = \frac{1}{2}\int_\pi^{\sigma+3\pi} \Big(\operatorname{sen}(3\sigma - t) + \operatorname{sen}(5t - 3\sigma)\Big)\, dt$$

Integramos, usamos identidades trigonométricas y reducimos, obteniendo:

$$(x(t) * h(t))(\sigma) = \frac{2}{5}(\cos(2\sigma) - \cos(3\sigma)).$$

Por tanto la solución es

$$(x(t) * h(t))(\sigma) = \frac{2}{5}\big(\cos(2\sigma) - \cos(3\sigma)\big)\mathtt{u}(u + 2\pi).$$

3. (5 puntos) Resuelva el siguiente problema de valores iniciales usando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x''(t) - 4x(t) = 4e^{-2t} - 4e^{-2t}\,\mathtt{u}(t-2) \\ \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 3. \end{cases}$$

Solución: Si llamamos $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$, entonces aplicando las propiedades $\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - x(0)$, $\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$, dado que la transformada es lineal en estos casos, se sigue

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s), \quad \mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - 3,$$

así la ecuación diferencial al aplicarle la transformada de Laplace resulta

$$(s^2-4)X(s) = 3 + \mathcal{L}\{4e^{-2t} - 4e^{-2t}\,\mathtt{u}(t-2)\}(s) = 3 + \frac{4}{s+2} - 4\mathcal{L}\{e^{-2t}\,\mathtt{u}(t-2)\}(s).$$

Ahora aplicamos la propiedad

$$\mathcal{L}\{g(t-t_0)\mathtt{u}(t-t_0)\}(s) = e^{-st_0}\mathcal{L}\{g(t)\}(s).$$

Dado que este caso $t_0 = 2$ y $g(t-2) = 4e^{-2t}$, entonces $g(t) = 4e^{-2(t+2)} = 4e^{-4}e^{-2t}$, luego

$$(s^2-4)X(s) = \left(3 + \frac{4}{s+2}\right) - \frac{4e^{-4}}{s+2}e^{-2s}$$

es decir,

$$(*) \qquad X(s) = \frac{3s+10}{(s+2)^2(s-2)} - \frac{4e^{-4}}{(s+2)^2(s-2)}e^{-2s}.$$

Dado que

$$\frac{3s+10}{(s+2)^2(s-2)} = \frac{1}{s-2} + \frac{-1}{(s+2)^2} + \frac{-1}{(s+2)} = \mathcal{L}\left\{e^{2t} - te^{-2t} - e^{-2t}\right\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s).$$

Y que (puedo dejar la constante fuera del cálculo)

$$\frac{4}{(s+2)^2(s-2)} = \frac{1}{4(s-2)} + \frac{-1}{(s-2)^2} + \frac{-1}{4(s+2)} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{4}e^{2t} - te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s).$$

Aplicando de nuevo la propiedad anterior, se tiene que

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - e^{-4}e^{-2s}\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-4}g(t-2)\}(s)\mathtt{u}(t-2)\}(s),$$

es decir, $\boxed{x(t) = \left(e^{2t} - te^{-2t} - e^{-2t}\right) - \left(\frac{1}{4}e^{2t-8} - te^{-2t} + \frac{7}{4}e^{-2t}\right)\mathtt{u}(t-2)}$.

4. (1'5 puntos) Calcule la serie de Fourier trigonométrica correspondiente a la señal:

$$x(t) = \left(\cos(\tfrac{t}{2})\right)^3 - \left(\mathrm{sen}(\tfrac{t}{3})\right)^2.$$

Solución: Sabemos que la primera señal tiene período $T_1 = 4\pi$, y la segunda $T_2 = 6\pi/2 = 3\pi$ por tanto como $T_1/T_2 = 4/3$ el período fundamental debe ser igual, o un divisor de,

$T = 3T_1 = 4T_2 = 12\pi$. De hecho si desarrollamos las funciones trigonométricas que nos dan resulta:

$$x(t) = \cos(\tfrac{t}{2})\frac{1}{2}\left(1 + \cos(t)\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \cos(\tfrac{2t}{3})\right),$$

y de nuevo desarrollando el producto de cosenos obtenemos

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos(\tfrac{t}{2}) + \frac{1}{2}\cos(\tfrac{2t}{3}) + \frac{1}{4}\cos(\tfrac{3t}{2}).$$

Luego $T_0 = 12\pi$, $w_0 = 1/6$, $a_0 = -1$, $a_3 = 3/4$, $a_4 = 1/2$ y $a_9 = 1/4$, y el resto de coeficientes de la serie de Fourier son 0.

T: 2 horas

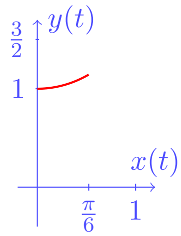
Dpto. Física y Matemáticas

21/12/2016	Cálculo I	Curso 2016-17	**Parcial 3**
Apellidos:		Nombre:	Grupo:

1. (2 puntos) Calcular la longitud de arco de la curva

$$y = 1 - \log(\cos x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}.$$

Solución: La curva en cuestión es:



Así, dicha longitud es (el cambio se ha hecho en clase para un ejercicio similar)

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \left(\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)}\, dx = \{\sin(x) = t\} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{\log(3)}{2}.$$

2. (1'5 puntos) Calcule la convolución de las señales

$$x(t) = te^{-2t}\mathtt{u}(t-\pi), \qquad h(t) = (1-t)\mathtt{u}(-t+3\pi).$$

Solución: En este caso

$$h(\sigma - t) = (1 - \sigma + t)\mathtt{u}(t - \sigma + 3\pi).$$

Teniendo en cuenta ambas expresiones tenemos que considerar dos casos:
1) Si $\sigma - 3\pi < \pi$, entonces

$$(x(t) * h(t))(\sigma) = \int_\pi^\infty te^{-2t}(1 - \sigma + t)\, dt.$$

2) Si $\sigma - 3\pi > \pi$, entonces

$$(x(t) * h(t))(\sigma) = \int_{\sigma-3\pi}^\infty te^{-2t}(1 - \sigma + t)\, dt.$$

Dado que para un A genérico (es sencilla realizando integración por partes)

$$\int_A^\infty te^{-2t}(1 - \sigma + t)\, dt = \frac{1}{4}e^{-2A}(2A(A - \sigma + 2) - \sigma + 2),$$

se sigue que

$$\int_\pi^\infty te^{-2t}(1 - \sigma + t)\, dt = \frac{1}{4}e^{-2\pi}(2\pi(\pi - \sigma + 2) - \sigma + 2),$$

y que

$$\int_{\sigma-3\pi}^\infty te^{-2t}(1 - \sigma + t)\, dt = \frac{1}{4}e^{-2\sigma+6\pi}(2\pi(9\pi - 3\sigma - 6) + 3\sigma + 2)$$

Por tanto la solución es

$$(x(t)*h(t))(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-2\pi}(2\pi(\pi-\sigma+2)-\sigma+2) & \text{si } \sigma < 4\pi, \\ \frac{1}{4}e^{-2\sigma+6\pi}(2\pi(9\pi-3\sigma-6)+3\sigma+2) & \text{si } \sigma > 4\pi. \end{cases}.$$

3. (5 puntos) Resuelva el siguiente problema de valores iniciales usando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x''(t) + x'(t) = t\,\mathtt{u}(t-2) \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución: Si llamamos $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$, entonces aplicando las propiedades $\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - x(0)$, $\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$, dado que la transformada es lineal en estos casos, se sigue

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - 1, \quad \mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - s,$$

así la ecuación diferencial al aplicarle la transformada de Laplace resulta

$$(s^2+s)X(s) = 1 + s + \mathcal{L}\{t\,\mathtt{u}(t-2)\}(s).$$

Ahora aplicamos la propiedad

$$\mathcal{L}\{g(t-t_0)\mathtt{u}(t-t_0)\}(s) = e^{-st_0}\mathcal{L}\{g(t)\}(s).$$

Dado que este caso $t_0 = 2$ y $g(t-2) = t$, entonces $g(t) = t+2$, luego

$$s(s+1)X(s) = 1 + s + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)e^{-2s}$$

es decir,

$$(*) \qquad X(s) = \frac{1}{s} + \left(\frac{1+2s}{s^3(s+1)}\right)e^{-2s}.$$

Dado que

$$\frac{1+2s}{s^3(s+1)} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\left\{-1+t+\frac{t^2}{2}+e^{-t}\right\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s).$$

Aplicando de nuevo la propiedad anterior, se tiene que

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 1 + \mathcal{L}\{g(t)\}(s)e^{-2s} = 1 + \mathcal{L}\{g(t-2)\}(s)\mathtt{u}(t-2)\}(s),$$

es decir, $\boxed{x(t) = 1 + \left(-1 - t + \frac{1}{2}t^2 + e^{-t+2}\right)\mathtt{u}(t-2)}$.

4. (1'5 puntos) Calcule la serie de Fourier trigonométrica correspondiente a la señal:

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}t\right)\cos(\pi t).$$

Solución: Similar al anterior, basta aplicar trigonometría básica

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi t}{6}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{13\pi t}{6}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{7\pi t}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right).$$

Siendo el período fundamental $T_0 = 12$, y la frecuencia fundamental $w_0 = \pi/6$. Por tanto $a_5 = 1/2$, $a_{13} = 1/2$, $b_2 = -1/2$, $b_{14} = -1/2$ y todos los demás son cero.