15/01/2016	Cálculo I (Grado en TICS) Curso 2015-16	**P. 3/Final**

INSTRUCCIONES. LEE ESTO ATENTAMENTE

- Recuerde que **cada problema se hace en hojas distintas**.
- Ponga en TODAS las hojas que entregue su **Número de orden en la esquina superior DERECHA**, **su nombre**, y **numérelas**.
- Todos los ejercicios puntúan igual.
- No está permitido el uso de calculadora.

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial con valores inciales empleando la transformada unilateral de Laplace:

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = \operatorname{sen}(2t)\,\mathtt{u}(t - \pi/4), \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Calcular la señal $x(t)$ sabiendo que su transformada de Laplace unlateral $X(s)$ satisface la siguiente identidad

$$X(s) = e^{-s} \log\left(\frac{s+1}{s}\right).$$

Se entiende que $\log(z)$ es el logaritmo neperiano.

3. Calcular la serie de Fourier asociada a la señal periódica

$$x(t) = \mathtt{u}(t-118) - \mathtt{u}(t-119) + \mathtt{u}(t-120) - \mathtt{u}(t-121), \quad 118 < t < 121.$$

Si vas por evaluación final debes realizar, además, estos ejercicios

4. Estudiar la convergencia de las series numéricas y sumarlas cuando sea posible:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{3-2n}\, a^{n-1},\ a > 0,$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5+n}}{\sqrt[4]{n^7+1}}.$

5. Calcular la longitud de arco de la curva $y = 1 - x^2$, para $0 \leq x \leq 1$.

Soluciones

1. Llamemos $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$. Usando las identidades

$$\mathscr{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - x(0^+), \qquad \mathscr{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+),$$

Teniendo en cuenta los valores iniciales que nos dan. Aplicando la transformada de Laplace, teniendo en cuenta su linealidad, obtenemos

$$(s^1 + 4)X(s) = \mathscr{L}\{\text{sen}\,(2t)\,\mathtt{u}(t - \pi/4)\}(s),$$

y empleando la propiedad

$$\mathscr{L}\{f(t - t_0)\mathtt{u}(t - t_0)\}(s) = e^{-t_0 s}\,\mathscr{L}\{f(t)\}(s),$$

se tiene que $\big(t_0 = \pi/4,\ f(t) = \cos(2t) = \text{sen}\,(2(t + \pi/4))\big)$

$$\mathscr{L}\{\text{sen}\,(2t)\,\mathtt{u}(t - \pi/4)\}(s) = e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{s}{s^2 + 4}.$$

Por tanto,

$$X(s) = e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{s}{s^2 + 4}\frac{1}{s^2 + 4} = e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{1}{2}\mathscr{L}\{\cos(2t) * \text{sen}\,(2t)\}(s).$$

Y dado, que (se asumen las señales causales)

$$(\cos(2t) * \text{sen}\,(2t))(\sigma) = \int_0^\sigma \cos(2t)\text{sen}(2(\sigma - t))\,dt = \sigma\,\text{sen}(\sigma)\cos(\sigma),$$

entonces

$$X(s) = e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{1}{2}t\,\text{sen}(t)\cos(t).$$

Luego,

$$x(t) = \frac{1}{2}(t - \pi/4)\,\text{sen}(t - \pi/4)\cos(t - \pi/4)\,\mathtt{u}(t - \pi/4),$$

es decir, la solución del problema es

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{16}(\pi - 4t)\cos(2t)\,\mathtt{u}(t - \pi/4)},$$

2. Si

$$X(s) = e^{-s}\log\left(\frac{s+1}{s}\right) \quad \Rightarrow \quad e^sX(s) = \log\left(\frac{s+1}{s}\right),$$

por tanto si llamamos $Y(s) = e^s X(s)$, e $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}(s)$, entonces

$$\mathscr{L}\{t\, y(t)\}(s) = -Y'(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \mathscr{L}\{1 - e^{-t}\}(s).$$

Por lo tanto, $t\, y(t) = 1 - e^{-t}$, y finalmente

$$x(t) = y(t-1)\mathtt{u}(t-1) = \frac{1 - e^{-t+1}}{t-1}\,\mathtt{u}(t-1).$$

3. La gráfica de dicha señal en dicho intervalo nos indica que que $T = 3$, además si la trasladamos al origen nos queda:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -3/2 < t < -1 \\ 0, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 3/2. \end{cases}$$

De hecho, $\omega_0 = 2\pi/3$. Donce

$$a_k = \frac{2}{3}\int_{-3/2}^{3/2} x(t)\cos(2k\pi t/3)\, dt = \frac{2}{3}\int_{-3/2}^{-1} \cos(2k\pi t/3)\, dt + \frac{2}{3}\int_{0}^{3/2} \cos(2k\pi t/3)\, dt$$

que es igual a

$$a_k = -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{3}\right)}{\pi k},$$

salvo para $k = 0$ donde la integral anterior es “0/0”. Para ese valor, de hecho vale $a_0 = 4/3$. Y,

$$b_k = \frac{2}{3}\int_{-3/2}^{3/2} x(t)\operatorname{sen}(2k\pi t/3)\, dt = \frac{2}{3}\int_{-3/2}^{-1} \operatorname{sen}(2k\pi t/3)\, dt + \frac{2}{3}\int_{0}^{3/2} \operatorname{sen}(2k\pi t/3)\, dt,$$

es decir

$$b_k = \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)}{\pi k}.$$

Por tanto la serie de Fourier trigonométrica de la señal será:

$$\mathscr{F}(x(t)) = \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{3}\right)}{\pi k} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{3} t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)}{\pi k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3} t\right).$$

---

4. a) Diverge para $a \geq 4$, y converge para $a < 4$ siendo

$$S = \frac{8}{4-a}.$$

b) Divergente pues es comparable con la serie armónica de orden $p = 7/4 - 5/3 = 1/12 < 1$.

5. Dado que $y' = -2x$ entonces

$$L_0^1(y) = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right) \approx 1,48$$

Basta aplicar un cambio trigonométrico visto en clase y resolver la integral racional trigonométrica.