Tema 3: Convolución – Encuesta (se cierra 22:00 7/10)

Calcular convolución de cada uno de los siguientes pares de señales, sin utilizar las propiedades de la transformada de Laplace ni de Fourier referentes a la convolución.

1. $te^t * \mathtt{u}(t)$, siendo $\mathtt{u}(t)$ el escalón unidad.

   Solución:
   $$(te^t * \mathtt{u}(t))(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} te^t u(\sigma - t)\, dt = \int_{-\infty}^{\sigma} te^t\, dt = e^\sigma(\sigma - 1).$$

2. $te^t * \mathtt{u}(t - \pi)$

   Solución:
   $$(te^t * \mathtt{u}(t-\pi))(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} te^t u(\sigma - t - \pi)\, dt = \int_{-\infty}^{\sigma-\pi} te^t\, dt = e^{\sigma-\pi}(\sigma - \pi - 1).$$

3. $\mathtt{u}(t) * \mathtt{u}(t)$

   Solución:
   $$(\mathtt{u}(t) * \mathtt{u}(t))(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) u(\sigma - t)\, dt.$$
   Hay que distinguir dos casos, 1) que $\sigma < 0$, y 2) que $\sigma > 0$. En el primer caso
   $$(\mathtt{u}(t) * \mathtt{u}(t))(\sigma) = 0.$$
   y en el segundo
   $$(\mathtt{u}(t) * \mathtt{u}(t))(\sigma) = \int_0^\sigma 1\, dt = \sigma,$$
   Por tanto la solución puede escribirse como combinación de escalones a la derecha de la forma:
   $$(\mathtt{u}(t) * \mathtt{u}(t))(\sigma) = \sigma \mathtt{u}(\sigma).$$

4. $\mathtt{u}(t + d) * \mathtt{u}(t + d)$, siendo d una constante

   Solución:
   $$(\mathtt{u}(t+d) * \mathtt{u}(t+d))(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathtt{u}(t+d)\mathtt{u}(\sigma - t + d)\, dt.$$
   Hay que distinguir dos casos, 1) que $\sigma < -2d$, y 2) que $\sigma > -2d$. En el primer caso
   $$(\mathtt{u}(t+d) * \mathtt{u}(t+d))(\sigma) = 0.$$
   y en el segundo
   $$(\mathtt{u}(t+d) * \mathtt{u}(t+d))(\sigma) = \int_{-d}^{d+\sigma} 1\, dt = 2d + \sigma,$$
   Por tanto la solución puede escribirse como combinación de escalones a la derecha de la forma:
   $$(\mathtt{u}(t+d) * \mathtt{u}(t+d))(\sigma) = (2d + \sigma)\mathtt{u}(\sigma + 2d).$$

5. $e^{-(t-2)}\,\mathtt{u}(t-2) * \big(\mathtt{u}(t+1) - \mathtt{u}(t-3)\big)$

Solución: Dado que la convolución es commutativa, podemos intercambiar el orden, quedando

$$(e^{-(t-2)}\,\mathtt{u}(t-2) * \big(\mathtt{u}(t+1) - \mathtt{u}(t-3)\big))(\sigma) = (\big(\mathtt{u}(t+1) - \mathtt{u}(t-3)\big) * e^{-(t-2)}\,\mathtt{u}(t-2))(\sigma).$$

Usando la definición de convolución se tiene

$$(\big(\mathtt{u}(t+1) - \mathtt{u}(t-3)\big) * e^{-(t-2)}\,\mathtt{u}(t-2))(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\mathtt{u}(t+1) - \mathtt{u}(t-3)\big) e^{-(\sigma-t-2)}\,\mathtt{u}(\sigma-t-2)\,dt$$

Hay que distinguir tres casos, 1) que $\sigma - 2 < -1$, 2) que $1- < \sigma - 2 < 3$, y 3) que $\sigma - 2 > 3$. En el primer caso

$$(\big(\mathtt{u}(t+1) - \mathtt{u}(t-3)\big) * e^{-(t-2)}\,\mathtt{u}(t-2))(\sigma) = 0.$$

En el segundo

$$(\big(\mathtt{u}(t+1) - \mathtt{u}(t-3)\big) * e^{-(t-2)}\,\mathtt{u}(t-2))(\sigma) = \int_{-1}^{\sigma-2} e^{-(\sigma-t-2)}\,dt = 1 - e^{1-\sigma}.$$

Y en el tercero

$$(\big(\mathtt{u}(t+1) - \mathtt{u}(t-3)\big) * e^{-(t-2)}\,\mathtt{u}(t-2))(\sigma) = \int_{-1}^{3} e^{-(\sigma-t-2)}\,dt = \big(e^4 - 1\big)\,e^{1-\sigma}.$$

Por tanto la solución puede escribirse como combinación de escalones a la derecha de la forma:

$$(\big(\mathtt{u}(t+1) - \mathtt{u}(t-3)\big) * e^{-(t-2)}\,\mathtt{u}(t-2))(\sigma) = (1 - e^{1-\sigma})\mathtt{u}(\sigma+1) - (1 - e^{5-\sigma})\mathtt{u}(\sigma-3).$$

6. $\operatorname{sen}(t)\,\mathtt{u}(t) * \cos(t)\,\mathtt{u}(t)$

Solución: Usando que $\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B))$, se tiene

$$(\operatorname{sen}(t)\,\mathtt{u}(t) * \cos(t)\,\mathtt{u}(t))(\sigma) = \int_0^{\sigma} \operatorname{sen}(t)\cos(\sigma - t)\,dt = \frac{1}{2}\sigma\sin(\sigma).$$

7. $(1-t)\,\mathtt{u}(t) * e^t\,\mathtt{u}(t)$

Solución: Como de nuevo son señales causales se tiene

$$((1-t)\,\mathtt{u}(t) * e^t\,\mathtt{u}(t))(\sigma) = \int_0^{\sigma} (1-t)e^{\sigma-t}\,dt = \sigma.$$

8. $e^t\,\mathtt{u}(t) * e^t\,\mathtt{u}(t)$

Solución:

$$(e^t\,\mathtt{u}(t) * e^t\,\mathtt{u}(t))(\sigma) = \int_0^{\sigma} e^t\,e^{\sigma-t}\,dt = \sigma e^{\sigma}.$$

9. $te^{-2t}\,\mathtt{u}(t) * e^{-4t}\,\mathtt{u}(t)$

Solución:

$$(te^{-2t}\,\mathtt{u}(t) * e^{-4t}\,\mathtt{u}(t))(\sigma) = \int_0^\sigma te^{-2t}\,e^{-4(\sigma-t)}\,dt = \frac{1}{4}\left(e^{-2\sigma}(2\sigma-1)+e^{-4\sigma}\right).$$

10. $te^{-2t}\,\mathtt{u}(t) * te^{-4t}\,\mathtt{u}(t)$

Solución:

$$(te^{-2t}\,\mathtt{u}(t) * te^{-4t}\,\mathtt{u}(t))(\sigma) = \int_0^\sigma te^{-2t}\,(\sigma-t)e^{-4(\sigma-t)}\,dt = \frac{1}{4}\left(e^{-2\sigma}(\sigma-1)+(\sigma+1)e^{-4\sigma}\right).$$

11. $e^{-t}\,\mathtt{u}(t) * e^{t}\,\mathtt{u}(-t)$

Solución: En este caso hay que distinguir de nuevo dos casos. 1) Si $\sigma > 0$, 2) y si $\sigma < 0$. En el primer caso

$$(e^{-t}\,\mathtt{u}(t) * e^{t}\,\mathtt{u}(-t))(\sigma) = \int_\sigma^\infty e^{-t}\,e^{\sigma-t}\,dt = \frac{e^{-\sigma}}{2}.$$

Y en el segundo

$$(e^{-t}\,\mathtt{u}(t) * e^{t}\,\mathtt{u}(-t))(\sigma) = \int_0^\infty e^{-t}\,e^{\sigma-t}\,dt = \frac{e^{\sigma}}{2}.$$

Por tanto expresada como funciones salto a la derecha se tiene

$$(e^{-t}\,\mathtt{u}(t) * e^{t}\,\mathtt{u}(-t))(\sigma) = \frac{e^{\sigma}}{2} + \frac{1}{2}\left(e^{-\sigma}-e^{\sigma}\right)\mathtt{u}(\sigma).$$