Tema 3: Integrales definidas – Encuesta (se cierra 22:00 4/11)

1. Calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ de de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^3 + x}$, $a = 1$, $b = 3$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x^2 - 1)(x - 1)}$, $a = 2$, $b = 4$.

   (c) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 + 1)(x + 1)}$, $a = 0$, $b = 3$.

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 6x + 9)}$, $a = 0$, $b = 1$

   (e) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 1)^3(x^2 - 9)}$, $a = -2$, $b = -1$

   (f) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x^2 - 1)^2}$, $a = -3$, $b = -2$

2. Calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ de de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \cos(3x)\cos(7x)$, $a = 0$, $b = \pi$.

   (b) $f(x) = \sinh^3(3x)$, $a = 0$, $b = 1$.

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\cosh^3(3x)}$, $a = 1$, $b = 2$.

   (d) $f(x) = \tan(2x)\tan(6x)$, $a = 0$, $b = \pi$.

3. Calcular la integral indefinida de de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{3 - 2\cos x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{\cos x \sin x}{2\cos x - 3\sin x}$

   (c) $f(x) = \dfrac{\cos 2x + \sin 2x}{3\cos 2x - \sin 2x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\sin(x/2)}{1 - \cos(x/2)}$

   (e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$

   (f) $f(x) = \dfrac{\cos x \sin 2x}{\cos 2x \sin x}$

4. Calcular integrando por partes la integral indefinida de de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = x^2 \log x$

   (b) $f(y) = e^x \sin^2(x)$

   (c) $f(x) = x\mathrm{argsinh}(x)$

   (d) $f(x) = e^{3x} \log x$

   (e) $f(y) = e^{2x}\cos^3(x)$

   (f) $f(x) = \cos^4 x \sin^5 x$

   (g) $f(x) = \cos^3 x \sin x$

   (h) $f(y) = \cos^2 x \sin^4 x$

   (i) $f(x) = x^2 \arccos x$

5. Calcular la integral indefinida de de las siguientes funciones:

   (a) $f(z) = x\sec^2(x^2)$

   (b) $f(t) = \dfrac{t^3}{(4 - 2t^4)^{11}}$

   (c) $f(z) = (z^5 + 4z^2)(z^3 + 1)^{12}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin x + 1}}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{(1 + \sqrt{x})^3}$

   (f) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x}{(3x^4 + 9x^2)^5}$

6. Calcular las integrales definidas siguientes:

(a) $\displaystyle\int_0^3 x^3\sqrt{9+x^2}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{28-12x-x^2}}dx$ (e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-2)\sqrt{x+2}}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{25-x^2}dx$ (d) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}dx$ (f) $\displaystyle\int_{-a}^0 \frac{x}{x^4+a^4}dx$

7. Calcular las integrales definidas siguientes:

(a) $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 6} e^{-x}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{d^3}{dx^3}\left(x^2+3x-1\right)dx$ (e) $\displaystyle\int_1^3 \frac{y^{1/3}+y^{1/2}}{y}dy$

(b) $\displaystyle\int_1^3 x\frac{x}{x+2}dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx$ (f) $\displaystyle\int_3^{-2} (-4)dx$

8. (a) Si

$$\int_1^4 (f-g)(x)dx = 10, \quad \int_4^1 (f+g)(x)dx = 3, \quad \text{y} \quad \int_0^4 g(x)dx = 5.$$

¿cuánto vale $\int_0^1 g(x)dx$?

(b) Si

$$\int_1^8 g(x)dx = 4, \quad \int_6^1 2g(x)dx = 6, \quad \text{y} \quad \int_2^8 g(x)dx = 5.$$

¿cuánto vale $\int_2^6 g(x)dx$?

Ejercícios extra algo más difíciles voluntarios

9. Demostrar que

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$

para cualquier n entero positivo y usar este hecho para calcular el área de un triángulo de base b y altura h usando particiones equidistantes.
(Se hizo en clase con algo de detalle).

10. Demostrar que

$$6\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)$$

para cualquier n entero positivo y usar este hecho para calcular el área de la parábola que pasa por el orígen, tiene derivada 0 en el orígen, y por el punto (a, a^2h) donde $a > 0, h > 0$.

11. Calcula los límites:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$