1. Calcule los siguientes límites:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}} \right)^{\sqrt{n+1}}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2-2n+2}{\sqrt{n^7+2n^5+n^4+3n^2+1}}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n^2-1}}{2n+1}$

   Solución:

   (a) Es un límite del tipo 1^∞, usaremos el Resultado 1.1.1. de teoría, y obtenemos e^2.

   (b) Vemos que el factor dominante de cada término de la fracción es n^3 y $n^{3.5}$ por tanto el límite es 0.

   (c) De nuevo vemos que los factores dominantes son del mismo grado, y que por tanto el límite es $(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$.

2. Estudie la convergencia de las siguientes series empleando los diferentes criterios vistos en clase:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1} \right)^n$,

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1} \right)^{n^2}$,

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} \cos \frac{1}{n^2}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$,

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n+1} \right)^2$,

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n}}$,

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+n} \right)^n$,

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2}$.

   Solución:

   (a) Divergente pues $a_n \to e \neq 0$.

   (b) Divergente pues $a_n \to e^0 = 1 \neq 0$,

   (c) Divergente pues $a_n \to e^{-1} \neq 0$,

   (d) Divergente pues $a_n \to 1 \neq 0$,

   (e) Convergente, ya que por el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1.$$

(f) Convergente, ya que por el criterio de comparación por paso al límite, dado que

$$\left(\frac{2}{n+1}\right)^2 \approx \frac{4}{n^2},$$

y la serie armónica de índice $p = 2 > 1$ es convergente, entonces la nuestra también converge.

(g) Divergente pues $a_n \to \infty \neq 0$,

(h) Convergente pues por el criterio de comparación por paso al límite, dado que

$$\frac{3n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \approx \frac{3}{n^2},$$

y la serie armónica de índice $p = 2 > 1$ es convergente, entonces la nuestra también converge.

(i) Convergente pues por el criterio de la ráiz,

$$\sqrt[n]{a_n} = (\frac{2n^2+1}{3n^2+n} = \frac{2}{3} < 1.$$

(j) Convergente pues por el criterio de comparación por paso al límite, dado que

$$\frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} \approx \frac{1}{n^3},$$

y la serie armónica de índice $p = 3 > 1$ es convergente, entonces la nuestra también converge.

3. Sea α un número real, $\alpha \geq 1$. Estudie, según los valores de α, el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n - 1}{3n+1}\right)^{n^2}.$$

Solución: Para $1 \leq \alpha \leq 3$ converge. Basta aplicar el criterio de la ráiz, y para el caso $\alpha = 3$ debemos usar de nuevo el Resultado 1.1.1. obteniendo como límite $e^{-2/3} < 1$, por tanto dicho caso es también convergente.

4. Analíce, según los valores del parámetro real a, el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + a^n}{3^n}.$$

Solución: Dado que es la suma de dos series geométricas y asumimos que $a \geq 0$, se tiene que la serie converge para $0 \leq a < 3$.

5. Indique si la siguiente igualdad es correcta o no lo es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^n + 3e^n}{5^n} = 3\frac{\pi}{5-\pi} + 2\frac{e}{5-e}.$$

Solución: No es correcta, si la sumamos usando la teoría (ver ejemplo 1.2.1), entonces, lo correcto sería

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^n + 3e^n}{5^n} = 2\frac{\pi}{5-\pi} + 3\frac{e}{5-e}.$$