Ejercicios: la derivada y sus aplicaciones.

Cálculo I (Asignatura: 350001). Universidad de Alcalá 2016-2017.

Profesor: Fernando San Segundo.

Contents

Advertencia: Muchos de estos ejercicios se han seleccionado de las siguientes fuentes:

- *Calculus: One and Several Variables, 10th Edition* de Salas, Hille, Etgen. El enlace es la décima edición inglesa.

- *Calculus I with Precalculus. 3rd Edition.* de Larson, Edwards. El enlace es la undécima edición inglesa.
- *Calculus, 2nd Edition* de Rogwaski. El enlace es a la tercera edición inglesa.

En todos los casos hay traducciones al español de ediciones anteriores y es relativamente sencillo encontrar algunas de esas ediciones en las bibliotecas. Cualquiera de esas ediciones es útil para encontrar una colección amplia de ejemplos y ejercicios. Y como os he dicho en clase, cualquiera de ellos es un excelente acompañamiento para este curso (y para Calculo 2 si usáis la segunda parte de cualquiera de esos libros).

Práctica de derivación.

Recuerda los dos enlaces que hemos visto en los esquemas de teoría:

- Con Wolfram Alpha.
- En esta página de la Universidad de Bluffton.

Derivación implícita.

1. Encuentra la recta tangente a la curva dada por:

$$2x^2y - y^3 + 1 = x + 2y$$

   en el punto $(1, 0)$. Puedes usar GeoGebra para comprobar tus resultados.

2. Encuentra la recta tangente a la curva dada por:

$$2x^3 + 2y^3 = 9xy$$

en el punto $(1, 2)$. ¿Qué sucede cuando tratas de calcular la tangente en el origen? Usa GeoGebra para dibujar la curva y tratar de entender lo que pasa.

3. La ecuación

$$x^2y^2 - 2x = 3$$

define a y implícitamente como función de x. Calcula las recta tangente en $(3, 1)$. Calcula además:

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

en ese punto para saber si la curva es cóncava o convexa.

Crecimiento y extremos usando la primera derivada.

En los siguientes ejercicios se trata de localizar los intervalos en los que la función dada es creciente o decreciente, sus puntos críticos y sus extremos locales. Siempre es conveniente tratar de esbozar una gráfica de la función a mano y *después* usar el ordenador para contrastar nuestros hallazgos.

1. $f(x) = -x^2 + 7x - 17$
2. $f(x) = 5x^2 + 6x - 4$
3. $f(x) = x^2 - 4x$
4. $f(x) = x^3 - 12x^2$
5. $f(x) = x^2 + 6x + 10$
6. $f(x) = x(x - 2)^3$
7. $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$
8. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x$
9. $f(x) = -(x^2 + 8x + 12)$
10. $f(x) = x^2 + (10 - x)^2$
11. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
12. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 4$
13. $f(x) = x^6 - 6x^2 + 15$
14. $f(x) = x^4 + x^3$
15. $f(x) = (x - 1)^2(x + 3)$
16. $f(x) = x^5 + x^3 + 1$
17. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$
18. $f(x) = x^5 + x3 + x$
19. $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x}{5}$
20. $f(x) = x^4 - 4x^{3/2}, (x > 0)$

21. $f(x) = x^4 - 32x + 4$
22. $f(x) = x^5 - x^2, (x > 0)$
23. $f(x) = x^{1/3} + 1$
24. $f(x) = x + \frac{1}{x}(x > 0)$
25. $f(x) = x^{2/3} - 4$
26. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x}, (x > 0)$
27. $f(x) = (x + 2)^{2/3}$
28. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
29. $f(x) = (x - 3)^{1/3}$
30. $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$
31. $f(x) = 5 - |x - 5|$
32. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$
33. $f(x) = |x + 3| - 1$
34. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$
35. $f(x) = \frac{x}{x + 3}$
36. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$
37. $f(x) = \frac{x + 4}{x^2}$
38. $f(x) = x + \sin x + \cos x$
39. $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$
40. $f(x) = \sin^2 x + \sin x$
41. $f(x) = x - 2\sin x, [0, 2\pi]$
42. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \leq 1 \\ 5 - x^2, & x > 1 \end{cases}$

Concavidad e inflexiones usando la segunda derivada.

En los siguientes ejercicios se trata de localizar los intervalos en los que la función dada es convexa (como x^2) o cóncava (como $-x^2$) y sus posibles puntos de inflexión. De nuevo, es conveniente tratar de esbozar una gráfica de la función a mano y comprobarla con el ordenador.

1. $f(x) = \frac{x^4}{2} + 2x^3$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$

3. $f(x) = -x^4 + 24x^2$
4. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
6. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
7. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$
8. $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$
9. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$
10. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2}$
11. $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$
12. $f(x) = x^3(1-x)$
13. $f(x) = x(x-4)^3$
14. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
15. $f(x) = (x-2)^3(x-1)$
16. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$
17. $f(x) = x\sqrt{x+3}$
18. $f(x) = (1-x)^2(1+x)^2$
19. $f(x) = x\sqrt{9-x}$
20. $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$
21. $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$
22. $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
23. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
24. $f(x) = (x-3)^{1/5}$
25. $f(x) = (x+2)^{5/3}$
26. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$
27. $f(x) = \sin^2 x, [0, \pi]$
28. $f(x) = 2(\cos^2 x) - x^2, [0, \pi]$
29. $f(x) = x^2 + \sin 2x, [0, \pi]$
30. $f(x) = \sin^4 x, [0, \pi]$

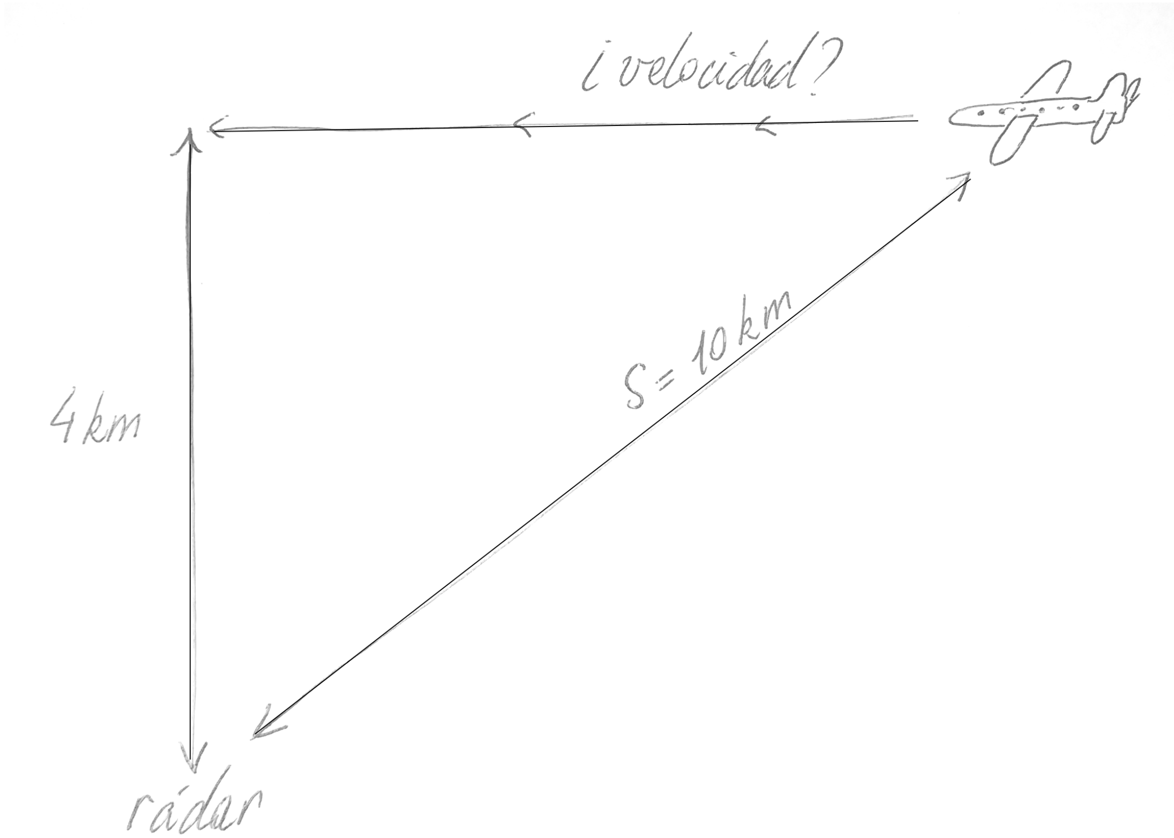
Extremos en un intervalo.

En los siguientes ejercicios se trata de localizar los posibles extremos locales y absolutos (si existen) de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1, [0, 3]$
2. $f(x) = 2x^2 + 5x - 1, [-2, 0]$
3. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}, [1, \sqrt{2}]$
4. $f(x) = (x - 1)(x - 2), [0, 2]$
5. $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2, [0, 4]$
6. $f(x) = \dfrac{x}{4 + x^2}, [-3, 1]$
7. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}, [-1, 2]$
8. $f(x) = x(\sqrt{4 - x^2})$, en su dominio de definición.
9. $f(x) = \sin^2 - \sqrt{3} \cos x, [0, \pi]$
10. $f(x) = x + \cot x, [0, 2\pi/3]$
11. $f(x) = 2 \cos^3 x + 3 \cos x, [0, \pi]$
12. $$f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 3, & 1 \leq x \leq 4 \\ 5 - x, & 4 < x \leq 7 \end{cases}$$
13. $$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x - x^2, & -2 \leq x \leq 0 \\ |x - 2|, & 0 \leq x < 3 \\ \dfrac{1}{3}(x - 2)^3, & 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Tasas de cambio.

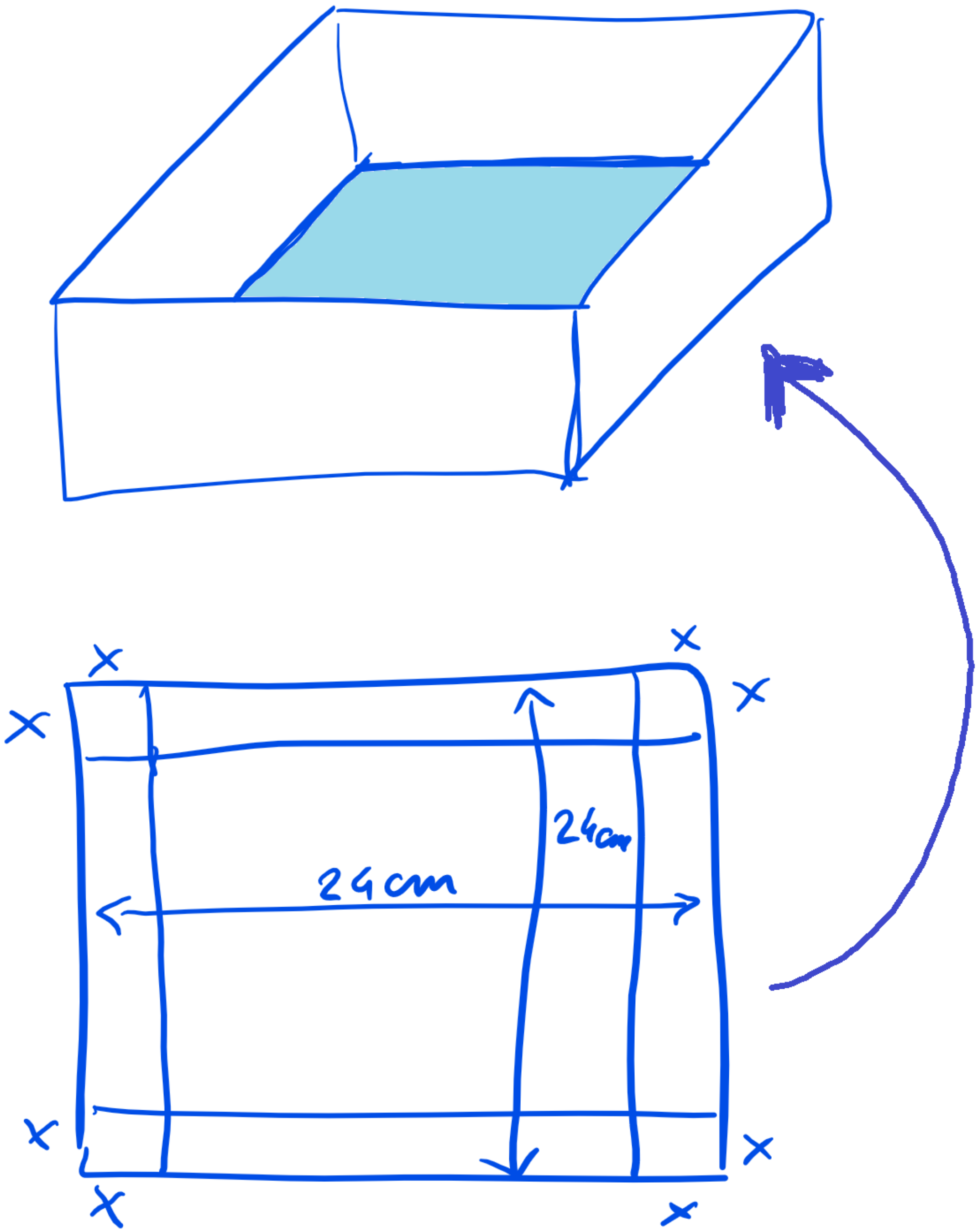
1. Un globo esférico se está hinchando de manera que su radio aumenta a 1cm/s. ¿A qué velocidad está aumentando la superficie del globo (en cm^2/s)?
2. Un avión vuela a una altura de 4000m hacia la vertical de una estación rádar, como muestra la figura.



Supongamos que cuando $s = 10km$ la velocidad a la que s disminuye es de $400km/h$. ¿A qué velocidad vuela el avión?

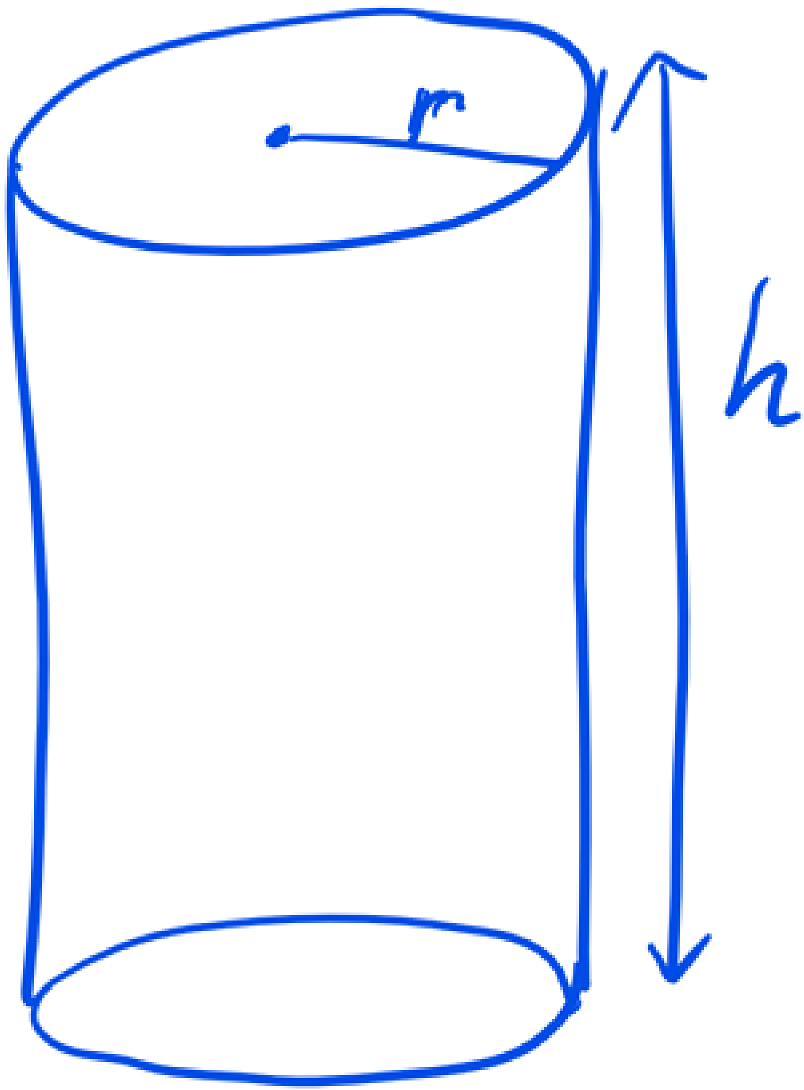
Problemas de optimización.

1. La siguiente figura muestra cómo se va a fabricar una caja de paredes rectas sin tapa, recortando cuadrados de longitud x en una lámina de cartón de dimensiones 24×24 (en cm) y plegando. ¿Cuál es el valor de x que produce una caja de volumen máximo?

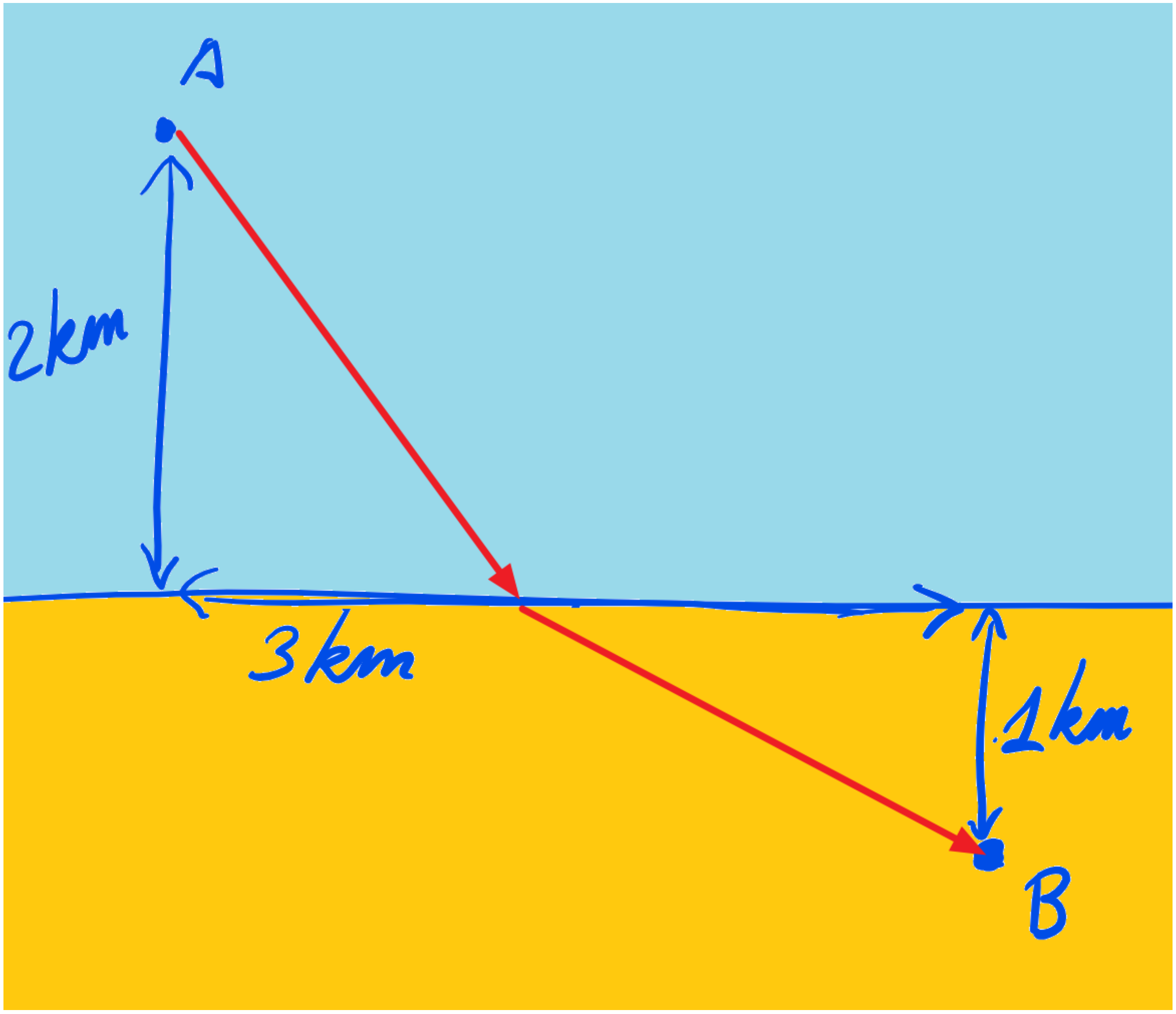


2. Sabemos que los números a y b suman 100. ¿Cuál es el valor de a para que el producto ab sea máximo?

3. Encuentra las dimensiones r y h de una lata cilíndrica de volumen 33 centímetros cúbicos con tapas que necesita una cantidad mínima de material para su fabricación. Compáralas con las de las latas que se usan habitualmente.



4. Una persona se encuentra en una embarcación situada en A a una distancia de 2km de la costa, y debe llegar hasta un punto situado 3km más arriba en la costa y 1km tierra adentro, como se ilustra en la figura.



Sabemos además que esa persona puede remar a 2km por hora y caminar a 4km por hora. ¿En qué punto de la costa debe desembarcar para llegar desde A hasta B en el menor tiempo posible?

5. Encuentra las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 6.

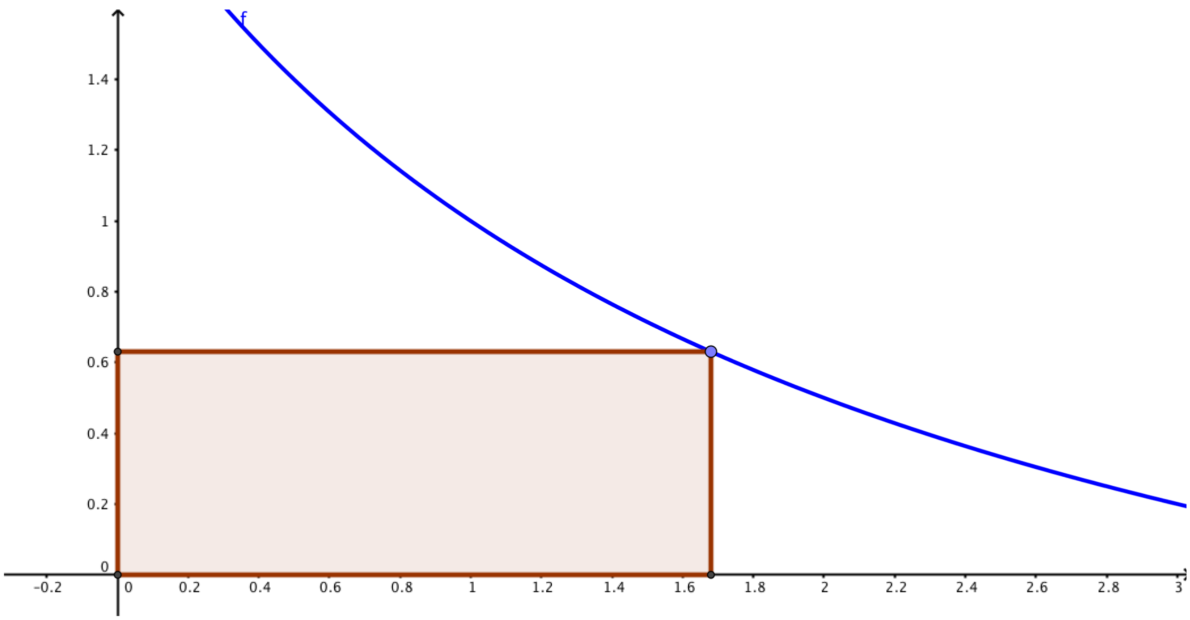
6. Un trozo de alambre de longitud L se va a doblar para formar un rectángulo. ¿Cuál es el área máxima que podemos conseguir?

7. Encontrar el punto de la parábola $y = x^2$ más cercano al punto $(3, 0)$.

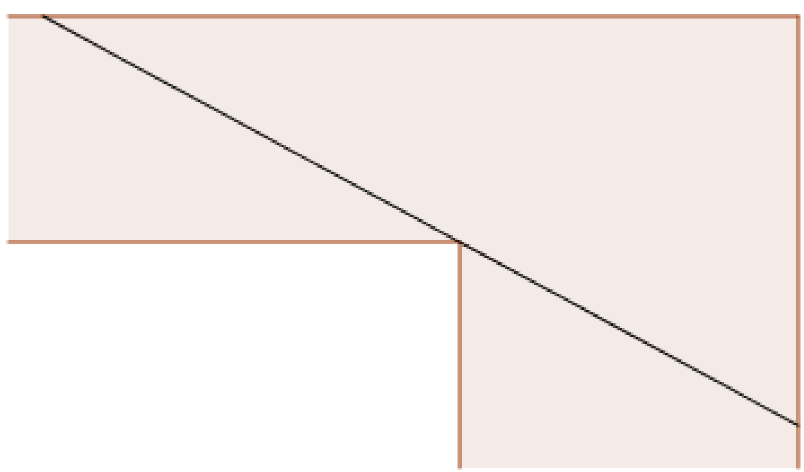
8. (CORREGIDO) Encuentra el área máxima de un rectángulo inscrito entre la gráfica de

$$f(x) = \frac{4 - x}{2 + x}$$

y los ejes, como se muestra en la figura:



9. Queremos hacer girar un vehículo a través de un pasillo que forma una esquina, como se ilustra en la figura.



   El tramo estrecho del pasillo tiene una anchura de 2m y el tramo más ancho 3m. ¿Cuál es la longitud máxima del vehículo que puede girar en esa esquina?

10. Sea (x, y) un puntop del plano. Hallar la distancia desde ese punto a la recta de ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

11. *Ejercicio extra:* busca en la Wikipedia la palabra *Braquistocrona* y lee el artículo correspondiente. No te preocupes si por el momento no entiendes las matemáticas. De momento, para picar tu curiosidad, aquí

tienes un vídeo dónde se explica de qué va este asunto. Pregúntale a tu profesor en qué se diferencia este problema de los anteriores.

Método de Newton.

En los siguientes ejercicios vamos a usar el método de Newton para encontrar una raíz de la función dada, tomando como valor inicial el punto x_0. En todos los casos queremos obtener una precisión $\epsilon = 0.00001$ (para simplificar, consideraremos que la hemos alcanzado cuando la diferencia entre x_n y x_{n+1} sea menor que 0.00001).
Observación: puedes hacer este ejercicio con una calculadora, pero es *mucho mejor* que escribas un programa en Matlab para calcular los valores x_n. Pide ayuda a tu profesor si no sabes por dónde empezar.

1. $f(x) = x^2 - 24, x_0 = 5$
2. $f(x) = \cos x - x, x_0 = 2$
3. $f(x) = \sqrt{x+3} - x, x_0 = 1$
4. $f(x) = x + \tan x, x_0 = 2$
5. El siguiente ejemplo muestra uno de los posibles problemas que pueden darse con el método de Newton, Usa ese método con:
$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{|x-2|}}$$
empezando en $x_0 = 3$. ¿Qué sucede? Cambia a $x_0 = 1$ y mira qué sucede ahora. Usa este fichero GeoGebra para analizar lo que está ocurriendo.
6. Otro ejemplo problemático. Usa el método de Newton con la función:
$$f(x) = x^3 - 1.265x + 1$$
tomando $x_0 = -0.23$. ¿Qué sucede? Abre este fichero GeoGebra para explorar lo que ocurre cuando usamos distintos valores de x_0.

Polinomios de Taylor.

En los siguientes ejercicios calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de esta funciones en $x_0 = 0$.

1. $f(x) = \sec x$
2. $f(x) = \ln \cos x$
3. $f(x) = \sqrt{1+x}$. En relación con este último ejemplo, pregúntale a tu profesor por el *Binomio de Newton.*

Usando los desarrollos de funciones que conocemos, calcula el polinomio de Taylor de orden n de estas funciones:

4. $f(x) = e^{-x}$
5. $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
6. $f(x) = \ln(1-x)$
7. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$