Dpto. Física y Matemáticas

22/11/2017	Cálculo I	Curso 2017-18	**Parcial 2**
Apellidos:		Nombre:	Grupo: A,B,C

1. (2.5 puntos) Estudiar y representar la función:

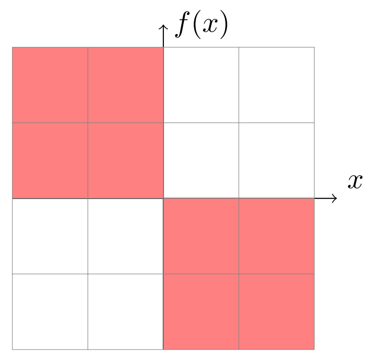
$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Solución:

- El dominio es todo $\mathbb{R}$, i.e. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, pues $e^{\alpha x} > 0$, $\forall x, \alpha \in \mathbb{R}$ y por tanto $e^x + e^{-x} \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Signo de $f(x)$.

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad e^{2x} + 1 > 0,$$

así $f(x) < 0$ solo si $e^{2x} - 1 < 0$ es decir $e^{2x} < 1$, $2x < 0$, luego para $x < 0$. Y $f(x) > 0$ de la misma forma para $x > 0$.
De hecho, corta a los ejes en $(0, 0)$ y tiene simetría impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$.



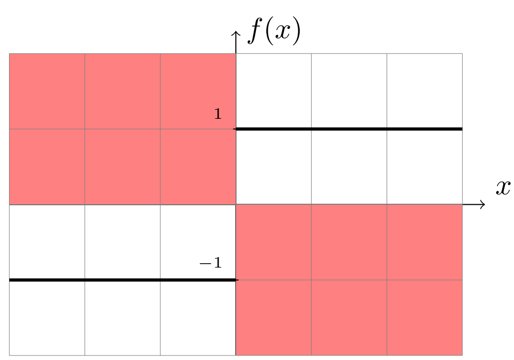
- Solo tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1,$$

pues los factores dominantes son e^{2x} tanto en el numerador como en el denominador. Y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

Por tanto sus asíntotas son $y = 1$ $y = -1$.



- Derivada primera:

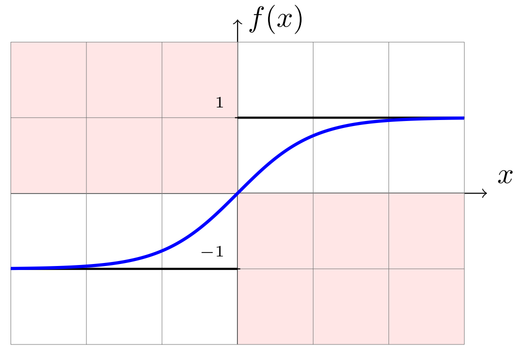
$$f(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por tanto la función es creciente y no tiene extremos relativos.

- Segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{8e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^3}, \quad e^{2x}+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vemos que $f''(x) = 0$ solo si $e^{2x} = 1$ es decir para $x = 0$, y como vimos en el signo $f''(x) > 0$ para $x < 0$ y $f''(x) < 0$ para $x > 0$. Así es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$.



2. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{5}{2\cos^2(x) - 2\text{sen}^2(x) - 3\text{sen}(x)\cos(x)}\,dx.$$

Solución: La función es par en seno y coseno, por tanto realizaremos el cambio de variable $z = \tan x$, $\sec^2 x\,dx = dz$

$$\int \frac{5}{2\cos^2(x) - 2\text{sen}^2(x) - 3\text{sen}(x)\cos(x)}\,dx = \int \frac{5\sec^2 x}{2 - 2\tan^2 x - 3\tan x}\,dx = \int \frac{5}{2-2z^2-3z}\,dz$$

El denominador tiene raíces -2 y $1/2$ por tanto

$$2 - 2z^2 - 3z = -2(z-1/2)(z+2),$$

luego

$$\int \frac{5}{2-2z^2-3z}\,dz = -\frac{5}{2}\int \frac{1}{(z-1/2)(z+2)}\,dz = -\frac{5}{2}\left(\int \frac{A}{(z-1/2)}\,dz + \int \frac{B}{(z+2)}\,dz\right)$$

Vemos que $A = 2/5$ y $B = -2/5$ luego

$$\int \frac{5}{2-2z^2-3z}\,dz = \int \frac{-1}{(z-1/2)}\,dz + \int \frac{1}{(z+2)}\,dz = -\ln|z-1/2| + \ln|z+2| + C$$

$$= \ln\left|\frac{z+2}{z-1/2}\right| + C = \ln\left|\frac{2z+4}{2z-1}\right| + C = \ln\left|\frac{2\tan x + 4}{2\tan x - 1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\text{sen }x + 2\cos x}{2\text{sen }x - \cos x}\right| + C'$$

Aquí se ha usado que $2\tan x + 4 = 2(\tan x + 2)$ y se ha llevado $\ln(2)$ a una constante C'.

3. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int x \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right)\,dx.$$

Solución: Integrando por partes

$$\int x \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right)\,dx \overset{IPP}{=} \left\{ \begin{array}{c} u = \arctan(\frac{1}{2x-1}); du = -\frac{2}{1+(2x-1)^2} \\ dv = xdx; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) + \int \frac{x^2}{1+(2x-1)^2}\,dx$$

Esta última integral la calcularemos aparte. Dado que el numerador y denominador tienen el mismo grado, los dividimos, quedando

$$\frac{x^2}{1+(2x-1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\frac{8x-4}{4x^2-4x+2}$$

por tanto

$$\int \frac{x^2}{1+(2x-1)^2}\,dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\ln|4x^2-4x+2| + C$$

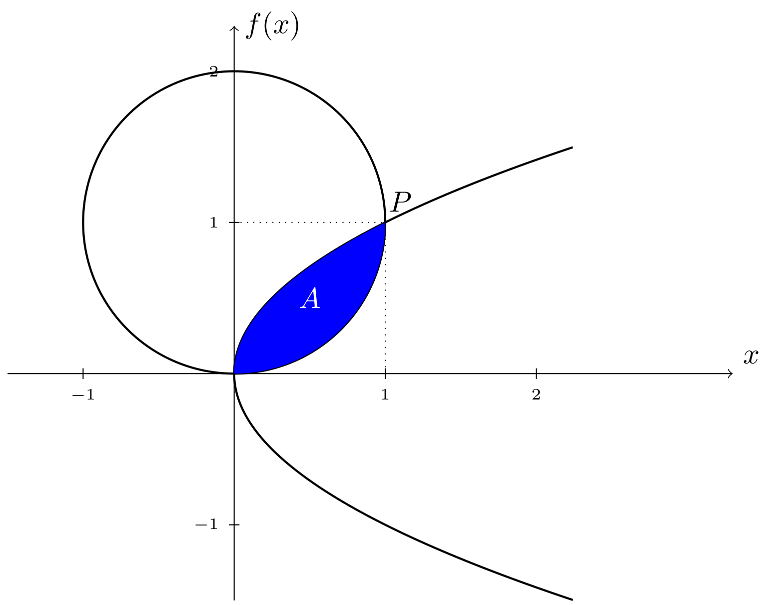
Luego

$$\int x \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right)\,dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\ln|1+(2x-1)^2| + C.$$

4. (2.5 puntos) Calcular el área encerrada por las curvas

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y^2 = x \end{array} \right.$$

Solución: Dado que $x^2+(y-1)^2 = 1$ es una circunferencia de centro $(0,1)$ y radi 1, y $y^2 = x$ es una parábola 'tumbada'; el área que nos piden es la siguiente



Los puntos de corte son la solución del sistema

$$y^2 = x \quad x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad O = (0,0),\ P = (1,1).$$

Método 1 (OX)

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) dx$$

ya que $y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$ y $1 - \sqrt{1-x^2}$ es la semicircunferencia inferior.

$$A = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^3}\right|_0^1 - \left(x\right|_0^1 + I_1,$$

con

$$I_1 = \int \sqrt{1-x^2}\, dx \overset{CV}{=} \left\{ \begin{array}{c} x = \mathrm{sen}(z)\ ;\ dx = \cos(z)dz \\ x = 0\ ;\ z = 0 \\ x = 1\ ;\ z = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(z)\, dz.$$

Empleando la identidad trigonométrica $2\cos^2(z) = 1 + \cos(2z)$ se tiene que

$$I_1 = \frac{1}{2}\int (1 + \cos(2z))\, dz = \left(\frac{z}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2z)}{4}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Luego

$$A = \frac{2}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi - 4}{12}.$$

Método 2 (OY)

$$A = \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\, dy - \int_0^1 y^2\, dy = I_2 - \frac{1}{3}\left(y^3\right|_0^1$$

donde I_2 es una integral irracional cuadrática, tomamos el Cambio de Variable $y-1 = \mathrm{sen}(z)$, luego $dy = \cos(z)\, dz$, así

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^0 \cos^2(z)\, dz = \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2z)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{4},$$

luego

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3\pi - 4}{12}.$$

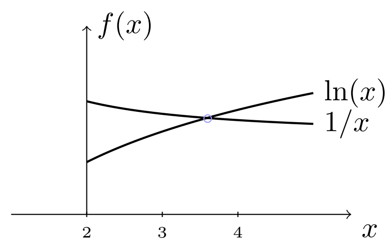
1. (2.5 puntos) Estudiar y representar la función:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x+1}.$$

Solución: La función $\ln(x)$ tiene como dominio $\mathbb{R}^+$ los reales positivos. La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{x(1-\ln(x))+1}{x(x+1)^2},$$

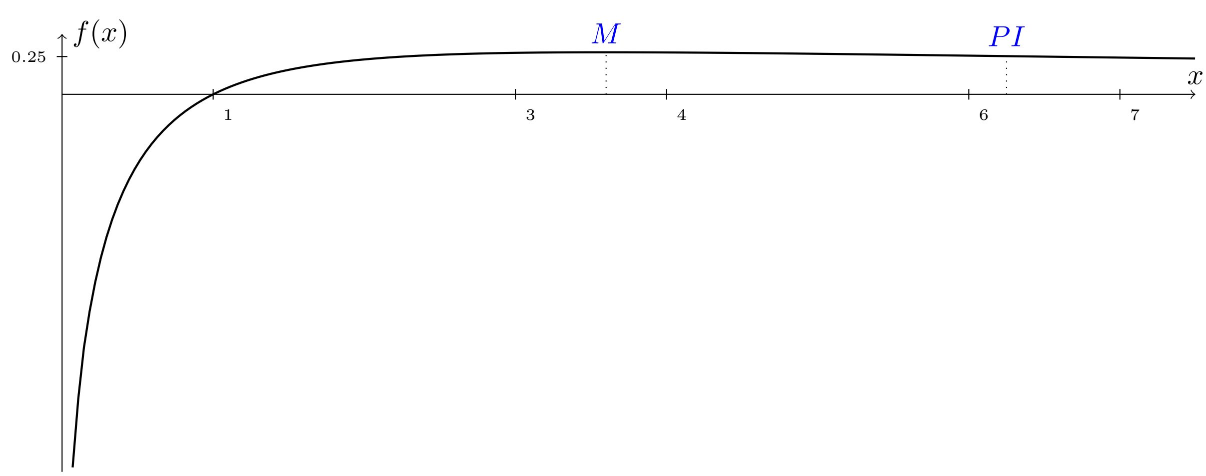
y como $f'(x) = 0$ puede escribirse de la forma $\ln(x) = 1 + \frac{1}{x}$, que solo tiene un corte, lo llamamos x_1 entonces dando valores pequeños y grandes a x se ve que $f'(1) > 0$ y $f'(\infty) < 0$, es decir que $(0, x_1)$ crece, y de (x_1, ∞) decrece. Más o menos $x_1 \approx 3'6$ y es un máximo local.



Para ver si tiene puntos de inflexión y analizar la curvatura, calculamos su segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-3x^2 - 4x - 1 + 2x^2\ln(x)}{x^2(x+1)^3},$$

esta función es más compleja de analizar, solo decimos que se anula en un punto mayor que el anterior, aunque si pintamos la gráfica va a parecer obvio.



Observación: Aunque el estudio parezca algo complejo, podría haberse realizado el dibujo tomando una serie de puntos de la forma e^k con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y aproximando $e \approx 3$ para ir construyendo el dibujo pues sabemos representar la función logaritmo y la recta por la que se divide.

2. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x^4-2x-2}{x(x+1)^2}\,dx.$$

Solución: Primero dividimos dicha fracción pues el grado del numerador es mayor.

$$x^4-2x-2 = x(x+1)^2\big(x-2\big)+3x^2-2,$$

luego dado que tiene un polo doble en -1 y uno simple en 0, se obtiene aplicando la descomposición de fracciones simples

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-2x-2}{x(x+1)^2}\,dx &= \int (x-2)\,dx + \int \frac{3x^2-2}{x(x+1)^2}\\ &=\frac{x^2}{2}-2x+A\int \frac{1}{x}\,dx + B\int \frac{1}{x+1}\,dx + C\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx\\ &=\frac{x^2}{2}-2x+A\ln|x|+B\ln|x+1|-\frac{C}{x+1}+Cte.\end{aligned}$$

Y es sencillo calcular $A=-2$, $B=5$, y $C=-1$.

3. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-3x}+\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\,dx$$

Solución: Esta integral es de las vistas en clase, se realiza el cambio $1-3x=t^6$, pues m=m.c.m.(2,3)=6. Quedando

$$\int \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-3x}+\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\,dx \overset{C.V.}{=} \left\{\begin{array}{c} 1-3x=t^6\\ -3dx=6t^5dt\end{array}\right\} = -2\int \frac{t^3}{t^2+t^4}t^5dt = -2\int \frac{t^6}{t^2+1}\,dt.$$

Dividimos los polinomios

$$t^6=(t^2+1)(t^4-t^2+1)-1,$$

así

$$-2\int \frac{t^6}{t^2+1}\,dt = -2\int (t^4-t^2+1)dt - 2\int \frac{-1}{t^2+1}\,dt = \frac{-2t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}-2t+2\arctan(t)+Cte.$$

Deshacemos el cambio, i.e. $t=\sqrt[6]{1-3x}$, y hemos terminado.

4. (2.5 puntos) Calcular el volumen de revolución respecto al eje OX que resulta al girar generan las funciones

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}},\quad g(x)=\frac{3-2x}{\sqrt[4]{1-x^2}},$$

entre $x=0$ y $x=1$.

Solución: Basta aplicar la teoría y ver que $f(x)\le g(x)$ por tanto

$$V_{OX}=\pi\int_0^1 (g(x))^2-(f(x)^2)\,dx = \pi\int_0^1 \frac{(3-2x)^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{C.V.}{=} \{x=\mathrm{sen}(t)\}.$$

Quedando

$$V_{OX}=\pi\int_0^{\pi/2}\big(3\mathrm{sen}^2(t)-12\mathrm{sen}(t)+9\big)\,dt=\frac{21}{4}\pi^2-12\pi.$$

Dpto. Física y Matemáticas

23/11/2017	Cálculo I	Curso 2017-18	**Parcial 2**
Apellidos:		Nombre:	Grupo: D

1. (2.5 puntos) Estudiar y representar la función:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}.$$

Solución: La función $\ln(x)$ tiene como dominio $(-1, +\infty)$. La derivada de la función es

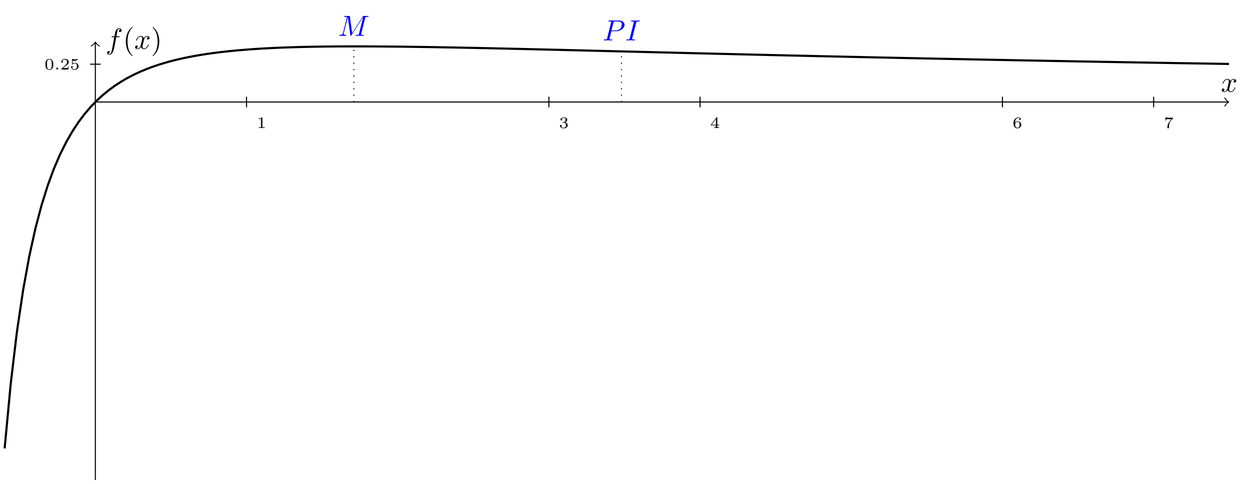
$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2},$$

y la ecuación $f'(x) = 0$ es $\ln(x+1) = 1$, es decir, $x_1 = e - 1 \approx 1.7$, y así para $(-1, x_1)$ crece, y de (x_1, ∞) decrece. Luego x_1 es un máximo local.

Para ver si tiene puntos de inflexión y analizar la curvatura, calculamos su segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2\ln(x+1) - 3}{(x+1)^3},$$

que tiene como solución de $f''(x) = 0$ el punto $x_2 = e^{3/2} - 1$ que es mayor que el anterior, y además para $(-1, x_2)$ es convexa, y en $(x_2, +\infty)$ concava. COn esto podemos representarla



Observación: Aunque el estudio parezca algo complejo, podría haberse realizado el dibujo tomando una serie de puntos de la forma $e^k - 1$ con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y aproximando $e \approx 3$ para ir construyendo el dibujo pues sabemos representar la función logaritmo y la recta por la que se divide.

2. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x^4 - 2x - 2}{x(x-1)^2}\, dx.$$

Solución: Primero dividimos dicha fracción puesel grado del numerador es mayor.

$$x^4 - 2x - 2 = x(x-1)^2(x+2) + 3x^2 - 4x - 2,$$

luego dado que tiene un polo doble en 1 y uno simple en 0, se obtiene aplicando la descomposición de fracciones simples

$$\int \frac{x^4-2x-2}{x(x-1)^2}\,dx = \int (x+2)\,dx + \int \frac{3x^2-4x-2}{x(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x + A\int \frac{1}{x}\,dx + B\int \frac{1}{x-1}\,dx + C\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x + A\ln|x| + B\ln|x-1| - \frac{C}{x-1} + Cte.$$

Y es sencillo calcular $A=-2$, $B=5$, y $C=-3$.

3. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\,dx$$

Solución: Esta integral es de las vistas en clase, se realiza el cambio $1-3x=t^6$, pues m=m.c.m.(2,3)=6. Quedando

$$\int \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\,dx \overset{C.V.}{=} \left\{ \begin{array}{c} 1-3x=t^6 \\ -3dx=6t^5dt \end{array} \right\} = -2\int \frac{t^3}{t^2-t^4}\,t^5dt = 2\int \frac{t^6}{t^2-1}\,dt.$$

Dividimos los polinomios

$$t^6 = (t^2-1)(t^4+t^2+1)+1,$$

así

$$2\int \frac{t^6}{t^2-1}\,dt = 2\int (t^4+t^2+1)dt + 2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + Cte.$$

Deshacemos el cambio, i.e. $t=\sqrt[6]{1-3x}$, y hemos terminado.

4. (2.5 puntos) Calcular el volumen de revolución respecto al eje OX que resulta al girar generan las funciones

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \quad g(x) = \frac{4-2x}{\sqrt[4]{1-x^2}},$$

entre $x=0$ y $x=1$.

Solución: Es similar al otro modelo. Basta aplicar la teoría y ver que $f(x)\leq g(x)$ por tanto

$$V_{OX} = \pi\int_0^1 (g(x))^2 - (f(x)^2)\,dx = \pi\int_0^1 \frac{(4-2x)^2-(x+1)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{C.V.}{=} \{x=\operatorname{sen}(t)\}.$$

Quedando

$$V_{OX} = \pi\int_0^{\pi/2} \left(3\operatorname{sen}^2(t) - 18\operatorname{sen}(t) + 15\right)\,dt = \frac{33}{4}\pi^2 - 18\pi.$$

Dpto. Física y Matemáticas

24/11/2017	Calculus I	Course 2017-18	**Partial Exam 2**
Surnames:		Name:	Group: E

1. (2.5 points) Assume that $m > 0$. Compute the following indefinite integral:

$$\int e^{mx} \cos(x) dx.$$

Solution: We apply integration by parts twice to get

$$\int e^{mx} \cos(x) dx = e^{mx} \sin(x) - \int m e^{mx} \sin(x) dx$$

$$= e^{mx} \sin(x) - m \left(-e^{mx} \cos(x) + m \int e^{mx} \cos(x) dx \right).$$

We write I for the integral in the enunciate. We have arrived at

$$I = e^{mx} \sin(x) + m e^{mx} \cos(x) - m^2 I.$$

Then, we have

$$I = \int e^{mx} \cos(x) dx = \frac{1}{m^2+1} \left(e^{mx} \sin(x) + m e^{mx} \cos(x) \right) + C,$$

for an arbitrary real constant C. Another possible solution is to interchange the roles of the elements involved in the technique of integration by parts.

2. (2.5 points) Compute the following indefinite integral:

$$\int \frac{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx.$$

Solution: We make the quotient and get that

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = x^2 + x + 1 + \frac{x-1}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

Then, the integral becomes

$$\int \frac{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \int x^2 + x + 1 + \frac{x-1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x-1}{x^3 + 2x^2 + x} dx.$$

We have $x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$. The decomposition of the function to be integrated is

$$\frac{x-1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Then, we conclude that

$$\int \frac{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| - \ln|x| - \frac{2}{x+1} + C,$$

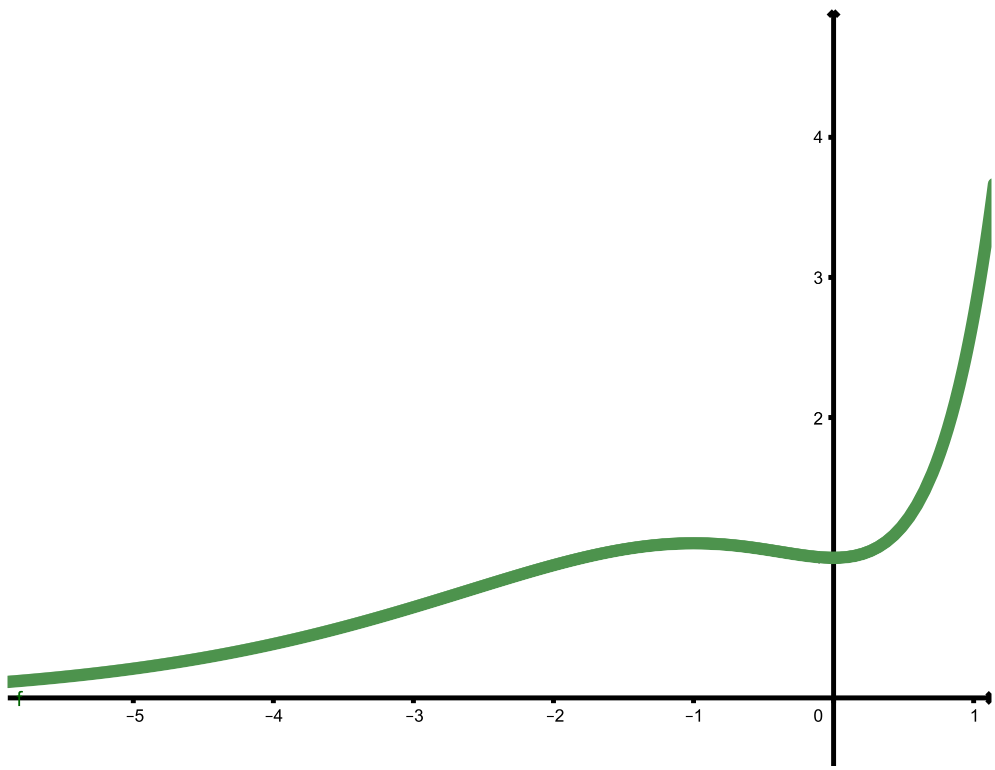
for an arbitrary real constant C.

4. (2.5 points) We consider the function

$$f(x) = (x^2 - x + 1)e^x.$$

Find its domain of definition, image set, cuts with the coordinate axis, symmetry, periodicity, asymptotes, intervals of monotonicity, relative maximum and minimum values, inflection points, and the intervals of concavity/convexity. Finally, sketch the function approximately.

Solution: The domain of the function is the whole set of real numbers. It only has the point $(0,1)$ as cut with the coordinate axis. It does not have any periodicity, nor symmetry. The line $y = 0$ is an asymptote to which the function approaches at $-\infty$. Studying the first derivative we obtain that f is monotone increasing in $(-\infty, 0)$ and monotone decreasing in $(-1, 0)$. The value $x = -1$ is a relative maximum and $x = 0$ is a relative minimum. We get two inflection points with the help of the second derivative of the function, which are $x_1 = -\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0.38$ and $x_0 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2.61$. The function is convex in $(-\infty, x_0) \cup (x_1, \infty)$ and concave in (x_0, x_1). The image is $(0, \infty)$.



2. (2.5 points) Find the volume of the surface generated by rotating the figure inside the curves $f(x) = x^2$ and $g(x) = 3x - 2$, along the OX axis.

Solution:

The curves cut at $x = 1$ and $x = 2$. We have

$$V = \pi \int_1^2 (3x-2)^2 dx - \pi \int_1^2 (x^2)^2 dx = \pi \left(\frac{4^3 - 1}{9} - \frac{2^5 - 1}{5} \right) = \frac{4\pi}{5}.$$

Dpto. Física y Matemáticas

21/11/2017	Cálculo I	Curso 2017-18	**Parcial 2**
Apellidos:	Nombre:		Grupo: F

1. (2.5 puntos) Estudiar y representar la función:

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}.$$

Solución: Dicha función es continua en todo $\mathbb{R}$ pues es el producto de funciones continuas en $\mathbb{R}$. Para ver si tiene puntos de corte, vemos que por un lado tiene el punto $(0, 1)$ y por el otro dado que $x^2 + x + 1$ no tiene soluciones reales pues no corta al eje OX.

Además su primera derivada es

$$f'(x) = (-x^2 + x)e^{-x}$$

Es decir, tiene puntos críticos en $x_1 = 0$, y $x_2 = 1$. Además viendo el signo de la derivada se tiene que

$$(-\infty, 0) \searrow \qquad (0, 1) \nearrow \qquad (1, \infty) \searrow$$

Por tanto $(0, 1)$ es un mínimo relativo, y $(1, 3e^{-1})$ es un máximo relativo.

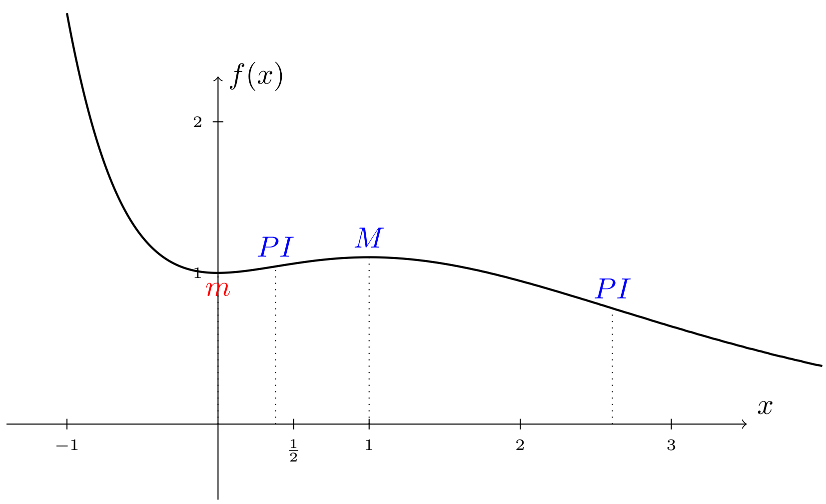
Respecto a la curvatura. La segunda derivada es

$$f''(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$$

que se anula en $x_3 = (3 - \sqrt{5})/2$ y $x_3 = (3 + \sqrt{5})/2$, por tanto

$$(-\infty, x_3) \smile \qquad (x_3, x_4) \frown \qquad (x_4, \infty) \smile$$

Además al estar multiplicada por una exponencial negativa en $+\infty$ tiende a cero, luego



2. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}\, dx.$$

Solución: Tenemos una i=función irracional cuadrática, en este caso dealizaremos el cambio de variable (C.V.) $x + 1 = 3 \sec t$, por tanto $dx = 3 \sec t \tan t\, dt$, así

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}\, dx = \int \frac{2x^2}{\sqrt{(x + 1)^2 - 3^2}}\, dx = 2 \int (\sec t - 1)^2\, dt = 2 \tan t - 4 \ln(\cot(t/2)) + t + C.$$

Deshacemos el cambio y nos queda

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+2x-8}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^2-9} + 2\ln((x+1)^2-9) - 4\ln(3) + \operatorname{arcsec}((x+1)/3) + C.$$

3. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$$

Solución: Es una integral racional

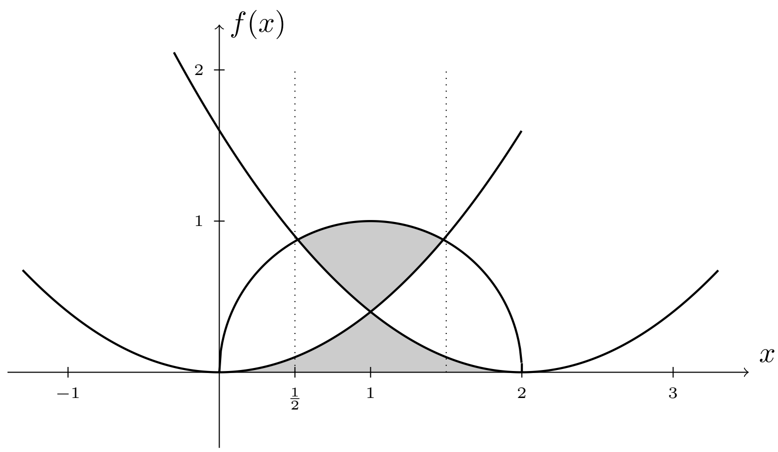
$$\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = \frac{A}{x-1}dx + \frac{M(x+1/2)+N}{x^2+x+1}dx.$$

Se ha hecho así pues $x^2+x+1 = (x+1/2)^2+3/4$. De hecho, $A=-1/3$. Por tanto

$$\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{M}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{2N}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + Cte.$$

En este caso se tiene que $M=1/3$ y $N=3/2$.

4. (2.5 puntos) Calcular el área representada en la figura



Nota: Una parábola es un desplazamiento en x de la otra.

Solución: Primero debemos obtener las funciones que tenemos que integrar, la parábola centrada en el orígen. Usando trigonometría sabemos que el punto de corte de la parábola y el círculo es el simétrico al $P=(1/2,\sqrt{3}/2)$ con respecto al eje $x=1$, es decir, $(3/2,\sqrt{3}/2)$ así al, y la parábola es de la forma $y=Ax^2$, por tanto

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = A(3/2)^2 \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{3} = 9A \quad\Rightarrow\quad A = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Teniendo este valor la otra parábola es

$$y = A(x-2)^2.$$

Es decir, que el área que me piden será la suma de dos áreas, la que está entre las parábolas que llamaremos A_1 y la otra que será A_2.

Cálculo de A_1 (por simetría):

$$A_1 = 2\int_0^1 Ax^2\,dx = \left(2A\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{2A}{3} = \frac{4}{9\sqrt{3}}.$$

Cálculo de A_2 (por simetría):

$$A_2 = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sqrt{1-(x-1)^2} - A(x-2)^2\right)\,dx = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx - \frac{19}{12}A.$$

Para la última integral aplicamos el cambio $x-1 = \operatorname{sen}(t)$, así

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \cos^2(t)\,dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right|_{t=-\frac{\pi}{6}}^{t=0} = \frac{3\sqrt{3}+2\pi}{24}.$$

Es decir, que el área total es

$$A = A_1 + A_2 = -\frac{11}{18\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}.$$