



22/11/2017	Cálculo I	Curso 2017-18	<b>Parcial 2</b>
Apellidos:		Nombre:	Grupo:

1. (2.5 puntos) Estudiar y representar la función:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

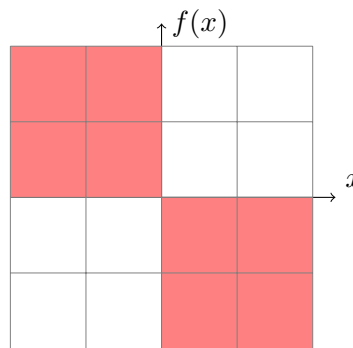
**Solución:**

- El dominio es todo  $\mathbb{R}$ , i.e.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ , pues  $e^{\alpha x} > 0, \forall x, \alpha \in \mathbb{R}$  y por tanto  $e^x + e^{-x} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .
- Signo de  $f(x)$ .

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad e^{2x} + 1 > 0,$$

así  $f(x) < 0$  solo si  $e^{2x} - 1 < 0$  es decir  $e^{2x} < 1, 2x < 0$ , luego para  $x < 0$ . Y  $f(x) > 0$  de la misma forma para  $x > 0$ .

De hecho, corta a los ejes en  $(0, 0)$  y tiene simetría impar, es decir,  $f(-x) = -f(x)$ .



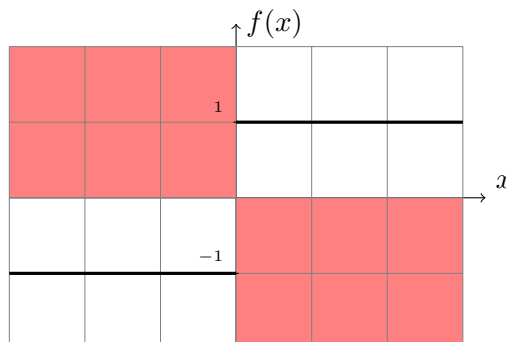
- Solo tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1,$$

pues los factores dominantes son  $e^{2x}$  tanto en el numerador como en el denominador. Y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

Por tanto sus asíntotas son  $y = 1$  y  $y = -1$ .



- Derivada primera:

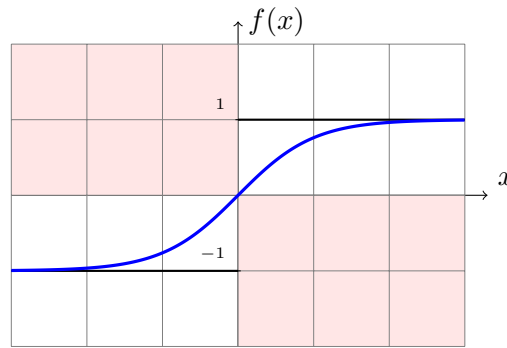
$$f(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4e^{2x}}{e^{2x} + 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por tanto la función es creciente y no tiene extremos relativos.

- Segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{8e^{2x}(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^3}, \quad e^{2x} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vemos que  $f''(x) = 0$  solo si  $e^{2x} = 1$  es decir para  $x = 0$ , y como vimos en el signo  $f''(x) > 0$  para  $x < 0$  y  $f''(x) < 0$  para  $x > 0$ . Así es cóncava en  $(-\infty, 0)$  y convexa en  $(0, \infty)$ .



2. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{5}{2 \cos^2(x) - 2 \operatorname{sen}^2(x) - 3 \operatorname{sen}(x) \cos(x)} dx.$$

**Solución:** La función es par en seno y coseno, por tanto realizaremos el cambio de variable  $z = \tan x$ ,  $\sec^2 x dx = dz$

$$\int \frac{5}{2 \cos^2(x) - 2 \operatorname{sen}^2(x) - 3 \operatorname{sen}(x) \cos(x)} dx = \int \frac{5 \sec^2 x}{2 - 2 \tan^2 x - 3 \tan x} dx = \int \frac{5}{2 - 2z^2 - 3z} dz$$

El denominador tiene raíces  $-2$  y  $1/2$  por tanto

$$2 - 2z^2 - 3z = -2(z - 1/2)(z + 2),$$

luego

$$\int \frac{5}{2 - 2z^2 - 3z} dz = -\frac{5}{2} \int \frac{1}{(z - 1/2)(z + 2)} dz = -\frac{5}{2} \left( \int \frac{A}{(z - 1/2)} dz + \int \frac{B}{(z + 2)} dz \right)$$

Vemos que  $A = 2/5$  y  $B = -2/5$  luego

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{2 - 2z^2 - 3z} dz &= \int \frac{-1}{(z - 1/2)} dz + \int \frac{1}{(z + 2)} dz = -\ln|z - 1/2| + \ln|z + 2| + C \\ &= \ln \left| \frac{z + 2}{z - 1/2} \right| + C = \ln \left| \frac{2z + 4}{2z - 1} \right| + C = \ln \left| \frac{2 \tan x + 4}{2 \tan x - 1} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{\operatorname{sen} x + 2 \cos x}{2 \operatorname{sen} x - \cos x} \right| + C' \end{aligned}$$

Aquí se ha usado que  $2 \tan x + 4 = 2(\tan x + 2)$  y se ha llevado  $\ln(2)$  a una constante  $C'$ .

3. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int x \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) dx.$$

**Solución:** Integrando por partes

$$\int x \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) dx \stackrel{IPP}{=} \left\{ \begin{array}{l} u = \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right); du = -\frac{2}{1+(2x-1)^2} \\ dv = x dx; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) + \int \frac{x^2}{1+(2x-1)^2} dx$$

Esta última integral la calcularemos aparte. Dado que el numerador y denominador tienen el mismo grado, los dividimos, quedando

$$\frac{x^2}{1+(2x-1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \frac{8x-4}{4x^2-4x+2}$$

por tanto

$$\int \frac{x^2}{1+(2x-1)^2} dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|4x^2-4x+2| + C$$

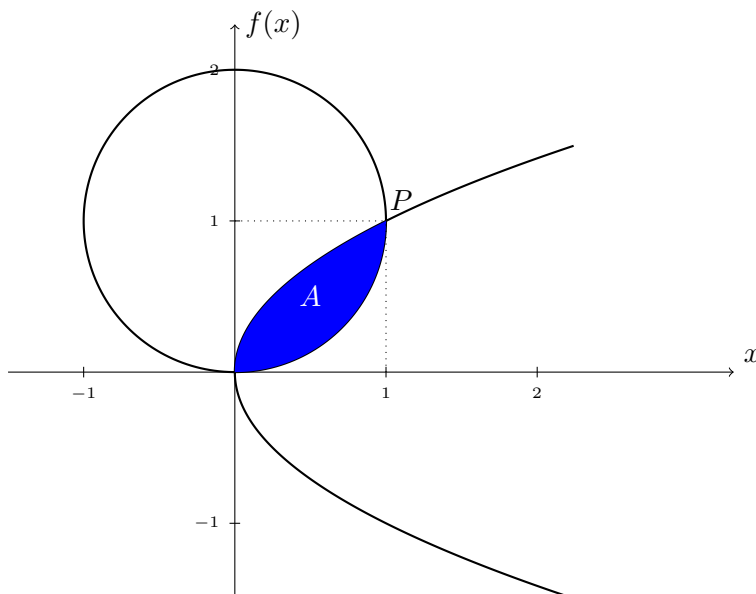
Luego

$$\int x \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln|1+(2x-1)^2| + C.$$

4. (2.5 puntos) Calcular el área encerrada por las curvas

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y^2 = x \end{cases}$$

**Solución:** Dado que  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  es una circunferencia de centro  $(0, 1)$  y radi 1, y  $y^2 = x$  es una parábola ‘tumbada’; el área que nos piden es la siguiente



Los puntos de corte son la solución del sistema

$$y^2 = x \quad x^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad O = (0, 0), \quad P = (1, 1).$$

Método 1 (OX)

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2}) dx$$

ya que  $y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$  y  $1 - \sqrt{1 - x^2}$  es la semicircunferencia inferior.

$$A = \frac{2}{3} \left( \sqrt{x^3} \Big|_0^1 - \left( x \Big|_0^1 + I_1 \right) \right),$$

con

$$I_1 = \int \sqrt{1 - x^2} dx \stackrel{CV}{=} \left\{ \begin{array}{l} x = \text{sen}(z) ; dx = \cos(z) dz \\ x = 0 ; z = 0 \\ x = 1 ; z = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \cos^2(z) dz.$$

Empleando la identidad trigonométrica  $2 \cos^2(z) = 1 + \cos(2z)$  se tiene que

$$I_1 = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2z)) dz = \left( \frac{z}{2} + \frac{\text{sen}(2z)}{4} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Luego

$$A = \frac{2}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi - 4}{12}.$$

Método 2 (OY)

$$A = \int_0^1 \sqrt{1 - (y - 1)^2} dy - \int_0^1 y^2 dy = I_2 - \frac{1}{3} \left( y^3 \Big|_0^1 \right)$$

donde  $I_2$  es una integral irracional cuadrática, tomamos el Cambio de Variable  $y - 1 = \text{sen}(z)$ , luego  $dy = \cos(z) dz$ , así

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^0 \cos^2(z) dz = \left( \frac{z}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}(2z) \Big|_{-\pi/2}^0 \right) = \frac{\pi}{4},$$

luego

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3\pi - 4}{12}.$$



23/11/2017	Cálculo I	Curso 2017-18	<b>Parcial 2</b>
Apellidos:		Nombre:	Grupo:

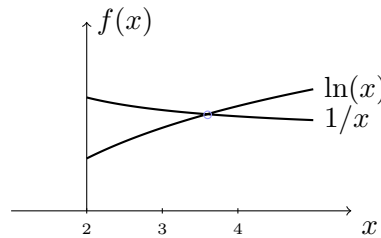
1. (2.5 puntos) Estudiar y representar la función:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x+1}.$$

**Solución:** La función  $\ln(x)$  tiene como dominio  $\mathbb{R}^+$  los reales positivos. La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{x(1 - \ln(x)) + 1}{x(x+1)^2},$$

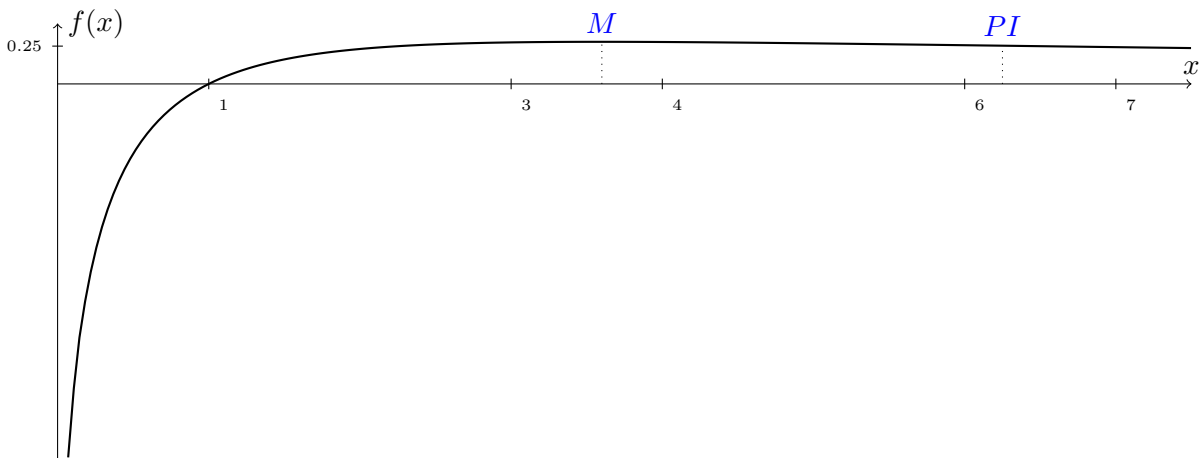
y como  $f'(x) = 0$  puede escribirse de la forma  $\ln(x) = 1 + \frac{1}{x}$ , que solo tiene un corte, lo llamamos  $x_1$  entonces dando valores pequeños y grandes a  $x$  se ve que  $f'(1) > 0$  y  $f'(\infty) < 0$ , es decir que  $(0, x_1)$  crece, y de  $(x_1, \infty)$  decrece. Más o menos  $x_1 \approx 3'6$  y es un máximo local.



Para ver si tiene puntos de inflexión y analizar la curvatura, calculamos su segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-3x^2 - 4x - 1 + 2x^2 \ln(x)}{x^2(x+1)^3},$$

esta función es más compleja de analizar, solo decimos que se anula en un punto mayor que el anterior, aunque si pintamos la gráfica va a parecer obvio.



**Observación:** Aunque el estudio parezca algo complejo, podría haberse realizado el dibujo tomando una serie de puntos de la forma  $e^k$  con  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  y aproximando  $e \approx 3$  para ir construyendo el dibujo pues sabemos representar la función logaritmo y la recta por la que se divide.

2. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x^4 - 2x - 2}{x(x+1)^2} dx.$$

**Solución:** Primero dividimos dicha fracción pues el grado del numerador es mayor.

$$x^4 - 2x - 2 = x(x+1)^2(x-2) + 3x^2 - 2,$$

luego dado que tiene un polo doble en  $-1$  y uno simple en  $0$ , se obtiene aplicando la descomposición de fracciones simples

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x - 2}{x(x+1)^2} dx &= \int (x-2) dx + \int \frac{3x^2 - 2}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + A \int \frac{1}{x} dx + B \int \frac{1}{x+1} dx + C \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + A \ln|x| + B \ln|x+1| - \frac{C}{x+1} + Cte. \end{aligned}$$

Y es sencillo calcular  $A = -2$ ,  $B = 5$ , y  $C = -1$ .

3. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-3x} + \sqrt[3]{(1-3x)^2}} dx$$

**Solución:** Esta integral es de las vistas en clase, se realiza el cambio  $1-3x = t^6$ , pues  $m=m.c.m.(2,3)=6$ . Quedando

$$\int \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-3x} + \sqrt[3]{(1-3x)^2}} dx \stackrel{C.V.}{=} \left\{ \begin{array}{l} 1-3x = t^6 \\ -3dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = -2 \int \frac{t^3}{t^2+t^4} t^5 dt = -2 \int \frac{t^6}{t^2+1} dt.$$

Dividimos los polinomios

$$t^6 = (t^2+1)(t^4-t^2+1) - 1,$$

así

$$-2 \int \frac{t^6}{t^2+1} dt = -2 \int (t^4 - t^2 + 1) dt - 2 \int \frac{-1}{t^2+1} dt = \frac{-2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - 2t + 2 \arctan(t) + Cte.$$

Deshacemos el cambio, i.e.  $t = \sqrt[6]{1-3x}$ , y hemos terminado.

4. (2.5 puntos) Calcular el volumen de revolución respecto al eje OX que resulta al girar generadas las funciones

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \quad g(x) = \frac{3-2x}{\sqrt[4]{1-x^2}},$$

entre  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Solución:** Basta aplicar la teoría y ver que  $f(x) \leq g(x)$  por tanto

$$V_{OX} = \pi \int_0^1 (g(x))^2 - (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{(3-2x)^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{C.V.}{=} \{x = \text{sen}(t)\}.$$

Quedando

$$V_{OX} = \pi \int_0^{\pi/2} (3\text{sen}^2(t) - 12\text{sen}(t) + 9) dt = \frac{21}{4}\pi^2 - 12\pi.$$



23/11/2017	Cálculo I	Curso 2017-18	<b>Parcial 2</b>
Apellidos:		Nombre:	Grupo:

1. (2.5 puntos) Estudiar y representar la función:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}.$$

**Solución:** La función  $\ln(x)$  tiene como dominio  $(-1, +\infty)$ . La derivada de la función es

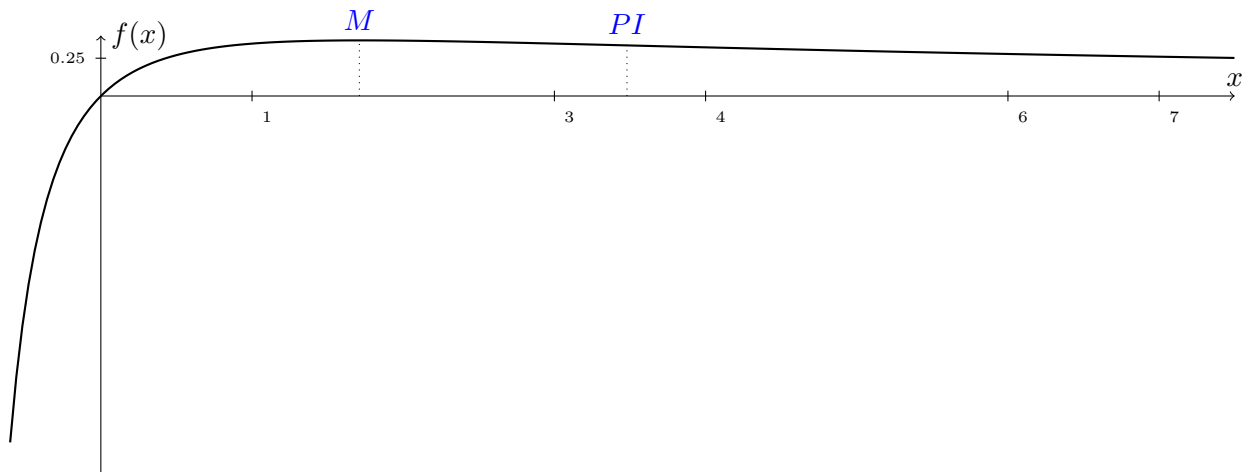
$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2},$$

y la ecuación  $f'(x) = 0$  es  $\ln(x+1) = 1$ , es decir,  $x_1 = e - 1 \approx 1.7$ , y así para  $(-1, x_1)$  crece, y de  $(x_1, \infty)$  decrece. Luego  $x_1$  es un máximo local.

Para ver si tiene puntos de inflexión y analizar la curvatura, calculamos su segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2 \ln(x+1) - 3}{(x+1)^3},$$

que tiene como solución de  $f''(x) = 0$  el punto  $x_2 = e^{3/2} - 1$  que es mayor que el anterior, y además para  $(-1, x_2)$  es convexa, y en  $(x_2, +\infty)$  concava. Con esto podemos representarla



**Observación:** Aunque el estudio parezca algo complejo, podría haberse realizado el dibujo tomando una serie de puntos de la forma  $e^k - 1$  con  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  y aproximando  $e \approx 3$  para ir construyendo el dibujo pues sabemos representar la función logaritmo y la recta por la que se divide.

2. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x^4 - 2x - 2}{x(x-1)^2} dx.$$

**Solución:** Primero dividimos dicha fracción pues el grado del numerador es mayor.

$$x^4 - 2x - 2 = x(x-1)^2(x+2) + 3x^2 - 4x - 2,$$

luego dado que tiene un polo doble en 1 y uno simple en 0, se obtiene aplicando la descomposición de fracciones simples

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x - 2}{x(x-1)^2} dx &= \int (x+2) dx + \int \frac{3x^2 - 4x - 2}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + A \int \frac{1}{x} dx + B \int \frac{1}{x-1} dx + C \int \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + A \ln|x| + B \ln|x-1| - \frac{C}{x-1} + Cte. \end{aligned}$$

Y es sencillo calcular  $A = -2$ ,  $B = 5$ , y  $C = -3$ .

3. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt[3]{(1-3x)^2}} dx$$

**Solución:** Esta integral es de las vistas en clase, se realiza el cambio  $1-3x = t^6$ , pues  $m = \text{m.c.m.}(2,3) = 6$ . Quedando

$$\int \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt[3]{(1-3x)^2}} dx \stackrel{C.V.}{=} \left\{ \begin{array}{l} 1-3x = t^6 \\ -3dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = -2 \int \frac{t^3}{t^2 - t^4} t^5 dt = 2 \int \frac{t^6}{t^2 - 1} dt.$$

Dividimos los polinomios

$$t^6 = (t^2 - 1)(t^4 + t^2 + 1) + 1,$$

así

$$2 \int \frac{t^6}{t^2 - 1} dt = 2 \int (t^4 + t^2 + 1) dt + 2 \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + Cte.$$

Deshacemos el cambio, i.e.  $t = \sqrt[6]{1-3x}$ , y hemos terminado.

4. (2.5 puntos) Calcular el volumen de revolución respecto al eje OX que resulta al girar generadas las funciones

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \quad g(x) = \frac{4-2x}{\sqrt[4]{1-x^2}},$$

entre  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Solución:** Es similar al otro modelo. Basta aplicar la teoría y ver que  $f(x) \leq g(x)$  por tanto

$$V_{OX} = \pi \int_0^1 (g(x))^2 - (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{(4-2x)^2 - (x+1)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{C.V.}{=} \{x = \text{sen}(t)\}.$$

Quedando

$$V_{OX} = \pi \int_0^{\pi/2} (3\text{sen}^2(t) - 18\text{sen}(t) + 15) dt = \frac{33}{4}\pi^2 - 18\pi.$$





24/11/2017	Calculus I	Course 2017-18	<b>Partial Exam 2</b>
Surnames:		Name:	Group:

1. (2.5 points) Assume that  $m > 0$ . Compute the following indefinite integral:

$$\int e^{mx} \cos(x) dx.$$

**Solution:** We apply integration by parts twice to get

$$\begin{aligned} \int e^{mx} \cos(x) dx &= e^{mx} \sin(x) - \int m e^{mx} \sin(x) dx \\ &= e^{mx} \sin(x) - m \left( -e^{mx} \cos(x) + m \int e^{mx} \cos(x) dx \right). \end{aligned}$$

We write  $I$  for the integral in the enunciate. We have arrived at

$$I = e^{mx} \sin(x) + m e^{mx} \cos(x) - m^2 I.$$

Then, we have

$$I = \int e^{mx} \cos(x) dx = \frac{1}{m^2 + 1} (e^{mx} \sin(x) + m e^{mx} \cos(x)) + C,$$

for an arbitrary real constant  $C$ . Another possible solution is to interchange the roles of the elements involved in the technique of integration by parts.

2. (2.5 points) Compute the following indefinite integral:

$$\int \frac{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx.$$

**Solution:** We make the quotient and get that

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = x^2 + x + 1 + \frac{x - 1}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

Then, the integral becomes

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx &= \int x^2 + x + 1 + \frac{x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx. \end{aligned}$$

We have  $x^3 + 2x^2 + x = x(x + 1)^2$ . The decomposition of the function to be integrated is

$$\frac{x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2}.$$

Then, we conclude that

$$\int \frac{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x + 1| - \ln|x| - \frac{2}{x + 1} + C,$$

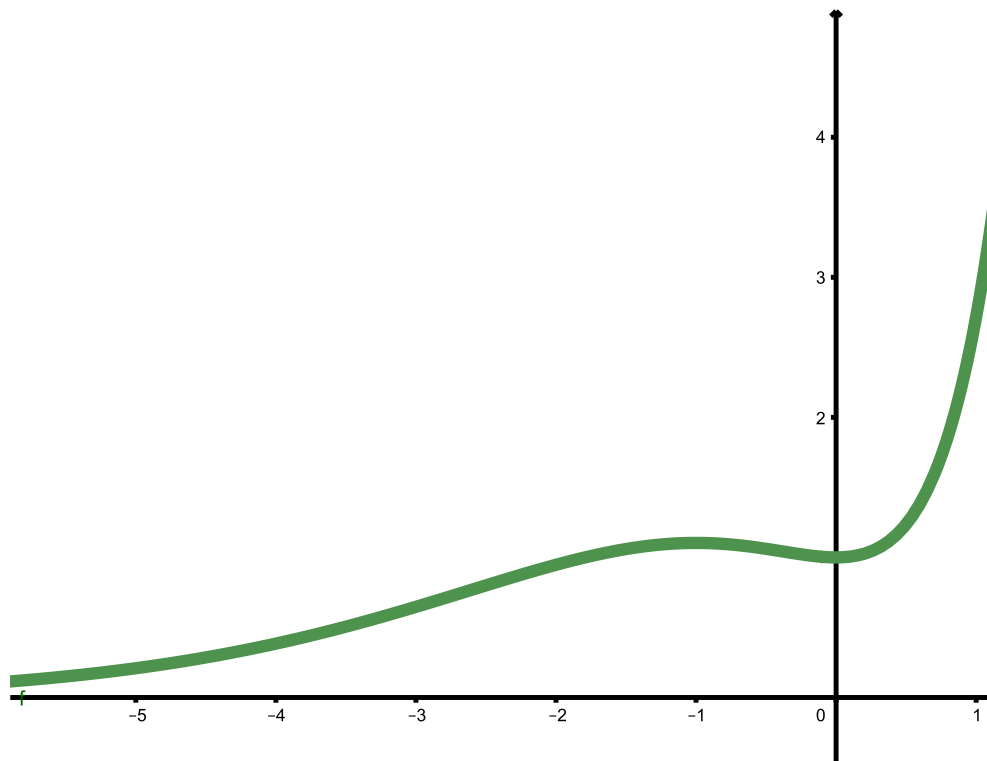
for an arbitrary real constant  $C$ .

4. (2.5 points) We consider the function

$$f(x) = (x^2 - x + 1)e^x.$$

Find its domain of definition, image set, cuts with the coordinate axis, symmetry, periodicity, asymptotes, intervals of monotonicity, relative maximum and minimum values, inflection points, and the intervals of concavity/convexity. Finally, sketch the function approximately.

**Solution:** The domain of the function is the whole set of real numbers. It only has the point  $(0, 1)$  as cut with the coordinate axis. It does not have any periodicity, nor symmetry. The line  $y = 0$  is an asymptote to which the function approaches at  $-\infty$ . Studying the first derivative we obtain that  $f$  is monotone increasing in  $(-\infty, 0)$  and monotone decreasing in  $(-1, 0)$ . The value  $x = -1$  is a relative maximum and  $x = 0$  is a relative minimum. We get two inflection points with the help of the second derivative of the function, which are  $x_1 = -\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0.38$  and  $x_0 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2.61$ . The function is convex in  $(-\infty, x_0) \cup (x_1, \infty)$  and concave in  $(x_0, x_1)$ . The image is  $(0, \infty)$ .



2. (2.5 points) Find the volume of the surface generated by rotating the figure inside the curves  $f(x) = x^2$  and  $g(x) = 3x - 2$ , along the OX axis.

**Solution:**

The curves cut at  $x = 1$  and  $x = 2$ . We have

$$V = \pi \int_1^2 (3x - 2)^2 dx - \pi \int_1^2 (x^2)^2 dx = \pi \left( \frac{4^3 - 1}{9} - \frac{2^5 - 1}{5} \right) = \frac{4\pi}{5}.$$



21/11/2017	Cálculo I	Curso 2017-18	<b>Parcial 2</b>
Apellidos:		Nombre:	Grupo:

1. (2.5 puntos) Estudiar y representar la función:

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}.$$

**Solución:** Dicha función es continua en todo  $\mathbb{R}$  pues es el producto de funciones continuas en  $\mathbb{R}$ . Para ver si tiene puntos de corte, vemos que por un lado tiene el punto  $(0, 1)$  y por el otro dado que  $x^2 + x + 1$  no tiene soluciones reales pues no corta al eje  $OX$ .

Además su primera derivada es

$$f'(x) = (-x^2 + x)e^{-x}$$

Es decir, tiene puntos críticos en  $x_1 = 0$ , y  $x_2 = 1$ . Además viendo el signo de la derivada se tiene que

$$(-\infty, 0) \searrow \quad (0, 1) \nearrow \quad (1, \infty) \searrow$$

Por tanto  $(0, 1)$  es un mínimo relativo, y  $(1, 3e^{-1})$  es un máximo relativo.

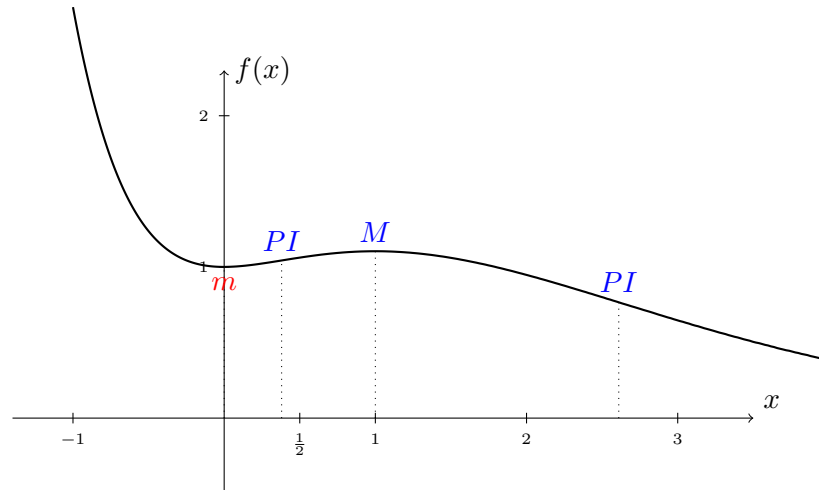
Respecto a la curvatura. La segunda derivada es

$$f''(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$$

que se anula en  $x_3 = (3 - \sqrt{5})/2$  y  $x_4 = (3 + \sqrt{5})/2$ , por tanto

$$(-\infty, x_3) \curvearrowright \quad (x_3, x_4) \curvearrowleft \quad (x_4, \infty) \curvearrowright$$

Además al estar multiplicada por una exponencial negativa en  $+\infty$  tiende a cero, luego



2. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}} dx.$$

**Solución:** Tenemos una función irracional cuadrática, en este caso realizaremos el cambio de variable (C.V.)  $x + 1 = 3 \sec t$ , por tanto  $dx = 3 \sec t \tan t dt$ , así

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}} dx = \int \frac{2x^2}{\sqrt{(x+1)^2 - 3^2}} dx = 2 \int (\sec t - 1)^2 dt = 2 \tan t - 4 \ln(\cot(t/2)) + t + C.$$

Deshacemos el cambio y nos queda

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^2 - 9} + 2 \ln((x+1)^2 - 9) - 4 \ln(3) + \operatorname{arcsec}((x+1)/3) + C.$$

3. (2.5 puntos) Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx$$

**Solución:** Es una integral racional

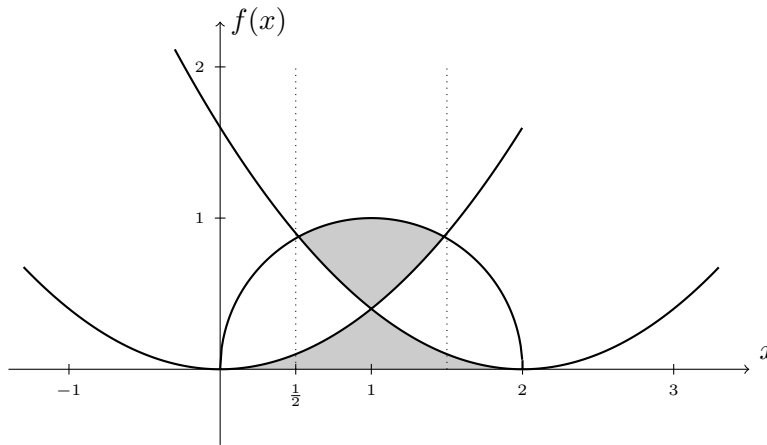
$$\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = \frac{A}{x-1} dx + \frac{M(x+1/2) + N}{x^2+x+1} dx.$$

Se ha hecho así pues  $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$ . De hecho,  $A = -1/3$ . Por tanto

$$\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{M}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{2N}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + Cte.$$

En este caso se tiene que  $M = 1/3$  y  $N = 3/2$ .

4. (2.5 puntos) Calcular el área representada en la figura



**Nota:** Una parábola es un desplazamiento en  $x$  de la otra.

**Solución:** Primero debemos obtener las funciones que tenemos que integrar, la parábola centrada en el origen. Usando trigonometría sabemos que el punto de corte de la parábola y el círculo es el simétrico al  $P = (1/2, \sqrt{3}/2)$  con respecto al eje  $x = 1$ , es decir,  $(3/2, \sqrt{3}/2)$  así al, y la parábola es de la forma  $y = Ax^2$ , por tanto

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = A(3/2)^2 \Rightarrow 2\sqrt{3} = 9A \Rightarrow A = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Teniendo este valor la otra parábola es

$$y = A(x-2)^2.$$

Es decir, que el área que me piden será la suma de dos áreas, la que está entre las parábolas que llamaremos  $A_1$  y la otra que será  $A_2$ .

Cálculo de  $A_1$  (por simetría):

$$A_1 = 2 \int_0^1 Ax^2 dx = \left( 2A \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2A}{3} = \frac{4}{9\sqrt{3}}.$$

Cálculo de  $A_2$  (por simetría):

$$A_2 = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \sqrt{1 - (x-1)^2} - A(x-2)^2 \right) dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx - \frac{19}{12}A.$$

Para la última integral aplicamos el cambio  $x-1 = \text{sen}(t)$ , así

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \cos^2(t) dt = \left( \frac{t}{2} + \frac{\text{sen}(2t)}{4} \right) \Big|_{t=-\frac{\pi}{6}}^{t=0} = \frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{24}.$$

Es decir, que el área total es

$$A = A_1 + A_2 = -\frac{11}{18\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}.$$



4/12/2017	Cálculo I	Curso 2017-18	<b>Segundo examen parcial</b>
Apellidos:		Nombre:	Grupo:

1. (2.5 puntos) Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int (x^2 + 1) \cos(x) dx$$

**Solución:**

Aplicando integración por partes dos veces se obtiene

$$\int (x^2 + 1) \cos(x) dx = \sin(x)x^2 + 2 \cos(x)x - \sin(x) + C,$$

para una constante arbitraria  $C$ .

2. (2.5 puntos) Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^3 - x^2} dx$$

**Solución:**

Se tiene que

$$\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^3 - x^2} = x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1},$$

por lo que

$$\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^3 - x^2} dx = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x} + \ln(x(x-1)) + C,$$

para una constante arbitraria  $C$ .

3. (2.5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = e^{-x^2+x}.$$

Determina su dominio de definición, conjunto imagen, cortes con los ejes, simetría, periodicidad, asíntotas, intervalos de monotonía, extremos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad. Realícese un dibujo esquemático aproximado de la función.

**Solución:**

El dominio de la función es  $\mathbb{R}$ . La función no es simétrica ni periódica. El único corte con los ejes es el punto  $(0, 1)$ . No existen asíntotas verticales. Se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

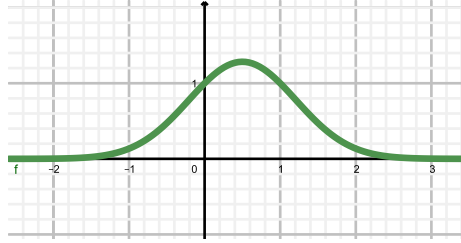
por lo que  $y = 0$  es una asíntota horizontal hacia la que se acerca  $f$  tanto en infinito como en menos infinito. Por tanto no existen asíntotas oblicuas. Al estudiar la derivada de la función,

$$f'(x) = (-2x + 1)e^{-x^2+x}$$

se tiene que  $x_0 = 1/2$  es un punto crítico de  $f$ . Además, el signo de la derivada a ambos lados de dicho punto permite deducir que  $x_0$  es un máximo relativo (y también absoluto de  $f$ ). Por tanto, la imagen de  $f$  es el conjunto  $(0, f(1/2)) = (0, \sqrt{e})$ . Para estudiar los puntos de inflexión se calcula la derivada segunda de  $f$ . Se tiene que

$$f''(x) = (4x^2 - 4x - 1)e^{-x^2+x},$$

de donde se obtienen dos puntos de inflexión:  $x_1 = (1 + \sqrt{2})/2$  y  $x_2 = (1 - \sqrt{2})/2$ . La función resulta ser convexa en  $(-\infty, x_2) \cup (x_1, \infty)$  y cóncava en  $(x_2, x_1)$ . Un dibujo de la función es



4. (2.5 puntos) Calcular el volumen de revolución generado al hacer girar en torno al eje  $OX$  la superficie situada en el interior de las gráficas determinadas por

$$g(x) = -x^2 \quad \text{y} \quad h(x) = -2x^2 + 2.$$

**Solución:**

Los grfos de las funciones  $g$  y  $h$  se cortan en  $x = -1$  y  $x = 1$ , siendo  $f(x) > g(x)$  para  $x \in (-1, 1)$ . Por tanto, el volumen queda determinado por

$$V = \pi \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2)^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (-x^2)^2 dx = \pi \frac{8}{3}.$$