INSTRUCCIONES. LEE ESTO ATENTAMENTE ANTES DE COMENZAR

- Recuerde que **cada problema se hace en hojas distintas**.
- Ponga en TODAS las hojas que entregue su **Número de orden en la esquina superior DERECHA**, **su nombre**, y **numere todas las hojas**.
- Todos los ejercicios puntúan igual.
- El examen tendrá una duración de 4 horas.

1. (1.5 Puntos) Analiza la convergencia cada una de estas series series numéricas, explicando brevemente cómo aplicas el criterio de convergencia correspondiente. En algunos casos puede ser una idea escribir los primeros términos de la serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2-5n+1}{4n^2-2n+1}\right)^{n^2}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-5n+1}{5n^4+2n}$

Solución: a) Si llamamos

$$a_n = \frac{(2n)!}{(3n)!} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \approx \frac{4n^2}{27n^3} \to 0 = c$$

cuando n va a infinito, por tanto por el criterio del cociente, dado que $c < 1$ la serie converge.

b) Aplicamos el criterio de la raíz, siendo

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{4n^2-5n+1}{4n^2-2n+1}\right)^n \to e^{-3/4} = c < 1$$

por tanto la serie converge.

c) Por el criterio de comparación, dado que la serie es comparable con la serie armónica de índice $p = 2$, y esta última es convergente lo es la del enunciado.

2. (1.5 Puntos) Estudia el dominio, crecimiento/decrecimiento, extremos (relativos y absolutos), concavidad/convexidad, y puntos de inflexión de la función

$$f(x) = 2x - \frac{8x^2}{3} + \frac{13x^3}{9} - \frac{x^4}{4}.$$

Solución: Dicha función es un polinomio por tanto su dominio es todo $\mathbb{R}$, es decir, Dom(f)=$\mathbb{R}$. La primera derivada de dicha función es

$$f'(x) = 2 - \frac{16}{3}x + \frac{13}{3}x^2 - x^3,$$

tomamos $3f'(x)$ y aplicamos la regla de Ruffini:

$$3f'(x) = 6 - 16x + 13x^2 - 3x^3,$$

y vemos que $x = 1$ es una solución, quedándonos

$$3f'(x) = (x-1)(-6 + 10x - 3x^2),$$

siendo las otras dos soluciones $x_2 = 5/3 + \sqrt{7}/3 \approx 2'55$ y $x_3 = 5/3 - \sqrt{7}/3 \approx 0'79$. Y por supuesto $x_1 = 1$.

La segunda derivada es igual a

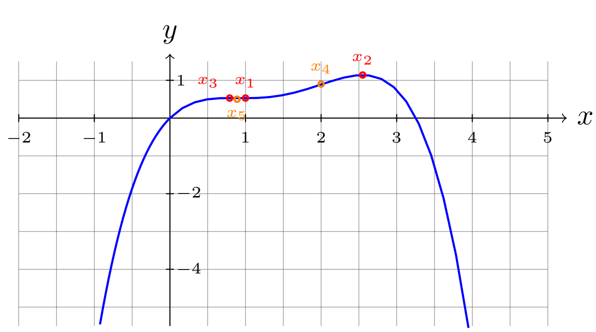
$$f''(x) = -\frac{16}{3} + \frac{26}{3}x - 3x^2,$$

que tiene como soluciones $x_4 = 2$ y $x_5 = 8/9$ por tanto tenemos dos puntos de inflexión en x_4 y x_5. Además al ser un polinomio de cuarto grado con coeficiente líder negativo (-1/4), entonces la función crece desde $(-\infty, x_3)$, luego decrece en (x_3, x_1), vuelve a crecer en (x_1, x_2) y finalmente decrece en (x_2, ∞). [Se comporta como una 'parábola'], por tanto tenemos un mínimo local en $(x_1, f(x_1)) = (1, 19/36) \approx (1, 0'53)$, y dos máximos locales en $(x_2, f(x_2)) \approx (2'55, 1'14)$ y $(x_3, f(x_3)) = (0'79, 0'53)$.

Por todo lo anterior, dado que la función se va a $-\infty$ cuando la variable x es grande (positiva o negativamente), entonces no tiene un mínimo global, pero si máximo global, en este caso está en $(2'55, 1'14)$.

Además, la función es concava en $(-\infty, x_5)$, y en (x_4, ∞) y convexa en (x_5, x_4).

Gráfica de la función en el intervalo [-2,5]



3. (1.5 Puntos) Calcula una primitiva para las siguientes señales:

a) $f(t) = \cos(3t)\,\cos(7t)$

b) $f(t) = \dfrac{2\sin(t) + \cos(t)}{\sin(t)\cos(t) - \sin(t)}$

c) $f(t) = \dfrac{\arctan(3t^2)}{9t^4 + 1}\, t$

Solución: Nos piden las primitivas, de esas tres funciones, en este caso:

$$a) \qquad \int \cos(3t)\,\cos(7t)\,dt = \frac{1}{2}\int \big(\cos(10t) + \cos(4t)\big)\,dt = \frac{\text{sen}(10t)}{20} + \frac{\text{sen}(4t)}{8} + Cte.$$

b) Esta es algo más larga, dado que no hay simetria, ni en seno ni en coseno, vamos a realizar el cambio $\text{sen}(t) = 2x/(1+x^2)$, $\cos(t) = (1-x^2)/(1+x^2)$, y $dt = 2dx/(1+x^2)$, quedando

$$\int \frac{2\sin(t) + \cos(t)}{\sin(t)\cos(t) - \sin(t)}\,dt = \int \frac{x^2 - 4x - 1}{2x^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{2x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2x^3}\right)\,dx,$$

es decir,

$$= \frac{1}{2}\log(x) + \frac{2}{x} + \frac{1}{4x^2} + Cte$$

y deshaciendo el cambio, la primitiva pedida resulta ser

$$\int \frac{2\sin(t) + \cos(t)}{\sin(t)\cos(t) - \sin(t)}\,dt = \frac{1}{2}\log(\tan(x/2)) + \frac{2}{\tan(x/2)} + \frac{1}{4\,(\tan(x/2))^2} + Cte.$$

Dependiendo de cómo se haya realizado puede dar un resultado aparentemente diferente.

$$c) \qquad \int \frac{\arctan(3t^2)}{9t^4 + 1}\,t\,dt = \frac{1}{12}\big(\arctan(3t^2)\big)^2 + Cte.$$

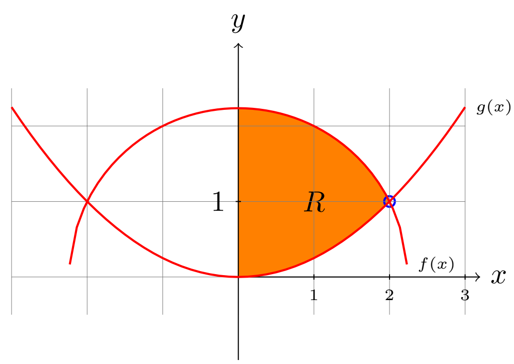
El examen sigue por detrás...

4. (1.5 punto) Calcular el volumen de revolución del sólido que resulta al girar las siguientes curvas alrededor del eje de abscisas (eje OY).

$$f(x) = \sqrt{5 - x^2}, \quad g(x) = \frac{x^2}{4}.$$

Nota: Cuidado con las simetrías de la figura. Representar la región de giro ayuda a resolver el problema.

Solución: Un esquema de las dos gráficas enunciadas es



por tanto la región que debe girar es la zona naranja llamada R, y debemos tener en cuenta la intersección de ambas funciones en el punto azul en la zona de x positivo.

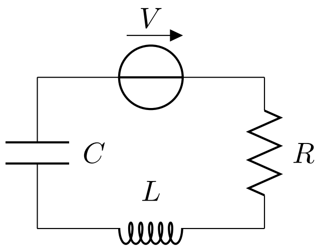
Por tanto el volumen pedido será

$$V_{R,OY} = 2\pi \int_0^2 x(f(x) - g(x))\, dx = 2\pi \int_0^2 x \left(\sqrt{5 - x^2} - \frac{x^2}{4} \right) dx.$$

Por tanto

$$V_{R,OY} = \frac{2}{48}\pi \left(-3x^4 - 16 \left(5 - x^2\right)^{3/2} + 75 \right) \Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3} \left(5\sqrt{5} - 4 \right) \pi \approx 15'038.$$

5. (2 Puntos) La ecuación diferencial que rige el circuito RLC de la figura es



$$Rq''(t) + Lq'(t) + C^{-1}q(t) = v(t),$$

donde R es la resistencia, L la inductancia, C la capacidad, $q(t)$ es la carga en el condensador en función del tiempo, $I(t) = q'(t)$ es la corriente que pasa por el circuito y $v(t)$ es el voltaje de la fuente en función del tiempo. Supongamos que $R = 1$, $L = 4$ y $C = 1/3$, que $q(0) = 0$, $q'(0) = 1$, y que se introduce un coseno amortiguado $v(t) = 13e^{-3t}\cos(3t)$. ¿Cuál es la carga $q(t)$ en cualquier instante del tiempo?

Solución: Primero sustituimos los datos y escribimos la ecuación diferencial con valores iniciales que nos piden resolver, en este caso,

$$q''(t) + 4q'(t) + 3q(t) = 13e^{-3t}\cos(3t)\mathtt{u}(t), \qquad q(0) = 0,\ q'(0) = 1.$$

Si llamamos $Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}(s)$, entonces aplicando las propiedades $\mathcal{L}\{q'(t)\}(s) = sQ(s) - q(0)$, $\mathcal{L}\{q''(t)\}(s) = s^2Q(s) - sq(0) - q'(0)$, dado que la transformada es lineal en estos casos, se sigue

$$\mathcal{L}\{q'(t)\}(s) = sQ(s), \quad \mathcal{L}\{q''(t)\}(s) = s^2Q(s) - 1,$$

así la ecuación diferencial al aplicarle la transformada de Laplace resulta

$$(s^2 + 4s + 3)Q(s) = 1 + \mathcal{L}\{13e^{-3t}\cos(3t)\mathtt{u}(t)\}(s)$$

Nota: Vamos a obviar por sencillez el salto, no se penalizará si no se ha añadido.

En este caso

$$\mathcal{L}\{13e^{-3t}\cos(3t)\}(s) = 13\frac{s+3}{(s+3)^2+9}.$$

Así la ecuación queda de la forma

$$(*) \qquad X(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)} + \frac{13}{(s+1)(s^2+6s+18)}.$$

Dado que las descomposiciones en fracciones simples son, entonces

$$\frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+3} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-t} - e^{-3t}\right\}(s)$$

y

$$\frac{13}{(s+1)(s^2+6s+18)} = \frac{1}{s+1} + \frac{-s-5}{s^2+6s+18} = \mathcal{L}\left\{e^{-t} - e^{-3t}\cos(3t) - \frac{2}{3}e^{-3t}\mathrm{sen}(3t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s).$$

Entonces, se tiene que

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-t} - e^{-3t}\right\}(s) + \mathcal{L}\{g(t)\mathtt{u}(t)\}(s),$$

es decir, $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right) + \left(e^{-t} - e^{-3t}\cos(3t) - \frac{2}{3}e^{-3t}\mathrm{sen}(3t)\right)\mathtt{u}(t)}$.

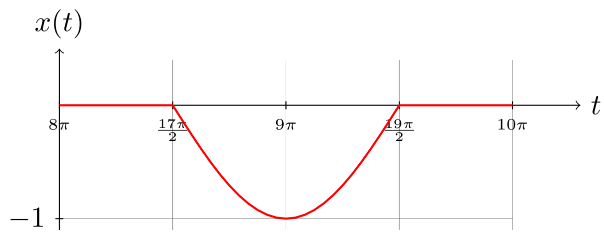
También se dará como válida $\boxed{x(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-3t}\cos(3t) - \frac{2}{3}e^{-3t}\mathrm{sen}(3t)}$.

---

6. (2 Puntos) Calcular la serie de Fourier de la señal periódica:

$$x(t) = \left(u(t - \tfrac{17\pi}{2}) - u(t - \tfrac{19\pi}{2})\right)\cos t, \qquad 8\pi < t < 10\pi.$$

Solución: La señal tiene la siguiente representación en el intervalo dado:



Así se ve que el período es $T = 2\pi$, por tanto $\omega_0 = 1$. Como

$$x(t) = \left(u(t - \tfrac{17\pi}{2}) - u(t - \tfrac{19\pi}{2})\right)\cos t, \qquad t \in (8\pi, 10\pi),$$

entonces por la simetría de la función $\cos(t)$, se tiene que

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), & -\pi < t < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \cos(t), & -\pi < t < -\frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad t \in (-T/2, T/2) = (-\pi, \pi),$$

luego $x(t)$ es par, así $b_k = 0$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, y

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t)\cos(kt)\,dt$$

aplicando las identidades trigonométricas del coseno

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{pi}{2}}^{\pi} \left(\cos((k+1)t) + \cos((k-1)t)\right)\,dt = \frac{2\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi\left(k^2 - 1\right)}.$$

viendo esa expresión debemos calcular aparte el caso $k = 1$, siendo

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2},$$

además

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(t)\,dt = -\frac{2}{\pi}.$$

Por tanto

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi\left(k^2 - 1\right)}\cos(kt).$$