Matemáticas I

Grado en Magisterio de Educación Primaria

Instructor: Roberto S. Costas Santos

Contents

Introducción. Qué debo saber antes de empezar

Antes de comenzar a leer este material didáctico se recomienda tener en cuenta que además de la lectura de este texto se recomienda:

- Fomentar la utilización del cálculo mental en las aulas y en casa,
- Tratar de fomentar la utilización de la lógica matemática y distinguirla de la lógica empleada en la vida cotidiana.
- Vincular los contenidos de esta asignatura y problemas de la vida cotidiana.

La gran mayoría de los contenidos deberían ser conocidos por el lector; la novedad de este trabajo es el punto de vista que el autor proporciona aquí intentando completar lo que ya conozca el lector.

En lo relativo a las hojas de prácticas, hay que tener en cuenta que todos los problemas deberían resolverse sin calculadora, salvo aquellos problemas en los que aparecerá un símbolo © donde el uso de la calculadora si está permitido.

Además, el nivel de dificultad vendrá marcado con estrellas ($\star$), ($\star\star$), $\ldots$ donde a más estrellas, más difícil.

1

Los números naturales ($\mathbb{N}$). Sistemas numéricos, aritmética elemental y en base

1.1 Los sistemas de numeración

Se cree que los sistemas de numeración comenzaron a existir debido al interés de contar diferentes tipos de objetos; debido a la gran cantidad de culturas que ha habido a lo largo de la historia, cuando se empezó a contar es lógico pensar que hubiera una gran variedad de formas de contar.

A medida que determinada civilización utilizaba un determinado sistema de numeración un problema que surgía de forma natural era el cómo contar, o cómo representar lo que se cuenta, de forma oral y escrita dichos números. Así, diferentes culturas generalmente superaban este problema de diferentes formar.

Es aquí donde entran en juego los **sistemas de numeración**[1].

Entre los sistemas más antiguos de formas de contar se encuentran, por ejemplo, los dedos de la mano para representar la cantidad cinco y después se hablaba de cuántas manos se tenía. También se sabe que se usaba cuerdas con nudos para representar cantidad. Los sistemas de numeración tienen mucho que ver con la cardinalidad de conjuntos (de objetos).

Entre ellos están los sistemas del antiguo Egipto, el sistema de numeración romana, y los usados en Mesoamérica por mayas, aztecas y otros pueblos.

Si quiere conocerse más acerca de sistemas de numeración se puede consultar la we de la wikipedia.

Los sistemas de numeración pueden clasificarse en dos grandes grupos: posicionales y no-

[1] Parte del texto se ha obtenido de los enlaces a los que se accedió el 30 de Mayo de 2017:
`https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_numeracion`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Numeral_system` (en Inglés).

posicionales: En los sistemas no-posicionales (o aditivos) los dgitos tienen el valor del smbolo utilizado, que no depende de la posición (columna) que ocupan en el número.

En los sistemas de numeración posicionales el valor de un dgito depende tanto del smbolo utilizado, como de la posición que ese smbolo ocupa en el número.

Dentro de este último podemos considerar los aditivos-multiplicativos –donde si se repite varias un número, eso se indica con otro número–y los multiplicativos–que es una variación del sistema aditivo, en el que se acepta la multiplicación de una cantidad por otra para evitar la repetición de tantos smbolos–.

Por ejemplo, el sistema de numeración egipcio es no posicional; el babilónico y el chino son sistemas de numeración aditivo-multiplicativo; y el sistema romano y el nuestro propio son Multiplicativos.

En concreto el sistema de numeración mas extendido es el sistema del numérico arábigo-hindú atribuido a dos matemáticos indios (puede verse que los símbolos indios son muy similares a los actuales además de otros símbolos que estaban asociados a las potencias de 10).

En el siglo V Aryabhata de Kusumapura desarrolló la nota del valor del lugar y así se prescinde los los símbolos de las potencias empleados anteriormente y se empleaban unas barras, que dejaron de emplearse en siglos posteriores. Así los números naturales actuales son:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Un siglo más tarde Brahmagupta introdujo el símbolo para el cero[2]. El sistema numérico y el concepto cero, desarrollado por los indios, se extendió paulatinamente a otros pases circundantes. De hecho los árabes tradujeron textos indios en la numerologa alrededor del año 825 (Al-Jwarizmi escribió el libro “Acerca de los cálculos con los números de la india”) y los extendieron al mundo occidental debido a sus vnculos comerciales con ellos, y el mundo Occidental los modificó y los llamó los números arábigos.

A partir de la introducción del nuevo sistema de numeración la aritmética se desarrolla de una forma muy rápida.

Como observación decir que también existen grandes semejanzas con la notación Sánscrito-Devanagari, que todava se usa en India y Nepal vecino.

Ejercicio reflexivo: Se recomienda que se reflexione acerca de las diferencias existentes entre los conceptos de dígito, número, y cifra.

Como hemos dicho previamente se decidió emplear la base 10 en nuestro sistema de numeración debido a la morfología del ser humano (tenemos 10 dedos entre las dos manos) y debido a la dificultad de comprensión de dicho sistema, se enfoca el aprendizaje del sistema de numeración acorde a la cantidad de dígitos. Es decir, el niño comienza considerando números de un dígito que si tiene asociado un concepto numérico, y se le da otras asociaciones abstractas como un color, una longitud (en el caso de las regletas), entre otros. El problema aparece cuando dicho número tiene más de un dígito, y no es hasta que se entiende los números entre el 11-90 hasta que no se tiene una idea global de la representación que utilizamos.

Dicho sistema entre otros inconvenientes tiene el del sentido numérico asociado a los dígitos. Un enfoque quizá más adecuado es el de la agrupación en grupos de 10 permitiendo así comenzar a utilizar las decenas y poco a poco ir asociando los grupos de 10 con el número diez. Y, de hecho, la práctica del recuento es una buena alternativa para ir dándole el sentido adecuado al número de 2 dígitos, y según vaya progresando puede comenzar a realizar operaciones aritméticas más complejas que ya incluyan números de dos o más dígitos.

[2]El nombre proviene del sánscrito `Shunya` (vacio), en árabe se llamo `Sifr`–nuestra palabra cifra viene de ahí.

Si se quiere obtener más información relativa a este tema en la asignatura de didáctica de las matemáticas.

1.2 La base b

En esta Secciónvamos a aprender a operar en base b. Vamos a distinguir entre dos casos fundamentales:

- La base b es menor o igual que diez, i.e. $b \leq 10$.
- La base b es mayor que diez, i.e. $b\,10$.

Siempre debemos tener presente que la forma de agrupar los elementos depende, evidentemente, de la base con la que trabajemos. Por ejemplo si tenemos 21 bolas y trabajamos en la base 8, entonces tendremos **2** grupos de 8 bolas y nos sobrarán **5** bolas, por tanto en la base 8 escribiremos

$$21 = 25_{(8},$$

mientras que si trabajamos en la base 11, pues tendremos **1** grupo de 11 bolas sobrándonos **10** bolas, es decir

$$21 = 1A_{(11},$$

donde el símbolo A en la base 11 representa al número 10 en la base 10.

Nota 1.2.1. *Es importante recalcar que en la base b,una decena tiene b unidades.*

Por ejemplo, en la base 7, una decena tiene 7 unidades, mientras que en la base 14 una decena tiene 14 unidades.

De hecho, el una base superior a 10 los símbolos que se emplearan para representar a los números en dicha base serán

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,\dots\}$$

así hasta llegar al valor de la base menos 1. Por ejemplo, en la base 14 los símbolos que se emplearán son

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D\}$$

por tanto en la base 14 tendrá sentido el número $C9D03_{(14}$ mientras que dicha expresión no tendrá sentido en la base 13 pues el dígito D no tendrá sentido.

Esto mismo sucede con una base por debajo de 10, por ejemplo en la base 6 los símbolos que se emplearán son

$$\{0,1,2,3,4,5\}.$$

Lógicamente la aritmética en estas bases nos llevará un tiempo comprenderla pero gracias a la comprensión de estas en la base 10 no debería llevarnos demasiado tiempo.

1. `La suma`: esta operación es interna en $\mathbb{N}$, ya que la suma de número snaturales es un numero natural.

   Debemos conocer las propiedades básicas de dicha operación, es decir, es:

   - conmutativa:

   $$a+b=b+a \qquad a,b \in \mathbb{N},$$

   - asociativa:

   $$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c), \qquad a,b,c \in \mathbb{N}.$$

Y la operación con este tipo de números no debería ser un problema, realicemos dos ejemplos:

$$3214_{(7} + 5602_{(7} = 12116_{(7}, \quad o \quad 2AB_{(13} + 741_{(13} = A1C_{(13}.$$

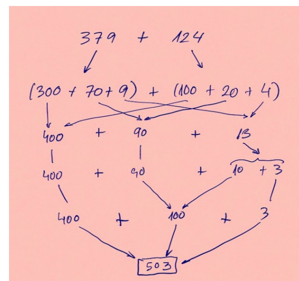
Vamos a ver las diferentes formas de sumar que se consideran en la actualidad. Definimos el algoritmo de la suma como la secuencia de pasos que dadas dos o más cantidades nos permite calcular la cantidad final resultante mediante las cantidades iniciales. Entre estos algoritmos están:

- Algoritmo tradicional.
- El Algoritmo por descomposición.

  Ejemplo 1.2.1. *Queremos sumar* $379 + 124$.
  Primero descomponemos ambos números en unidades que equivalen a centenas, decenas y unidades.
  Segundo, comenzamos colocando de manera horizontal las descomposiciones de 379+124. Es decir

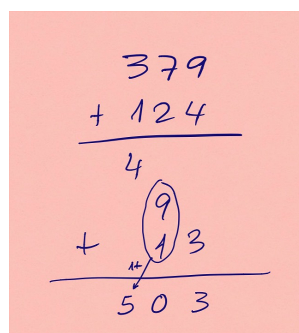
  $$300 + 70 + 9 + 100 + 20 + 4.$$

  Tercero, sumamos $300 + 100$, $70 + 20$, *y* $9 + 4$, *obteniendo como resultados respectivamente* 400, 90 *y* 13. *Dado que el 13 es el único nmero que no es una decena 'exacta', por lo que lo descomponemos en* $10 + 3$. *Con esto, ya tenemos 400+90+10+3 por lo que podemos sumar* $90 + 10$ *obteniendo* $400 + 100 + 3$. *Por último sumamos* $400 + 100$ *y obtenemos* 500 *que al sumarle los 3 ya nos da nuestro resultado, 503.*

- El Algoritmo empezando por la izquierda.

  Ejemplo 1.2.2. *Queremos sumar* $379 + 124$.
  Comenzamos colocándolos en vertical alineando los valores posicionales ($3 + 1 = 4$ *– escribimos 4 en las centenas),* ($7 + 2 = 9$ *–escribimos 9 en las decenas),* ($9 + 4 = 13$ *–escribimos 13, 1 en las decenas y 3 en las unidades). Luego operamos* $7 + 2 + 1 = 10$. *Sabemos que 10 decenas equivalen a 1 centena así que pasamos la centena al grupo de las centenas (escribimos 0 en las decenas de la suma final). Finalmente* $3 + 1 + 1 = 5$ *(escribimos 5 en las centenas de la suma final).*

2. `La resta`: esta operación es la inversa de la suma, es decir, que

$$a - b = c \text{ significa que } a + c = b.$$

Dicha operación no es interna ya que al restar dos números naturales no siempre resulta un número natural. Pero a diferencia de la suma existen diferentes formas, o algoritmos, para restar. Independiente cuál sea la forma elegida para restar debe tratar de consensuarse con el resto de compaerosdel centro para no generar confusiones con los estudantes. Se recuerda que la idea base es que <u>una decena son tantas unidades como indique la base</u>, para evitar confusiones con el lenguaje el concepto de `decena` hay que asociarlo a la base no al número 10, este es un error frecuente que se comete.

Así en la resta cuando el dígito del minuendo sea menor que el del sustraendo, un primer método consiste en tomar una decena del minuendo y traducirlo en tantas unidades como indique la base y tomar dicho valor como unidad. Mientras que en otros métodos en lugar de reducir el dígitos de las decenas del minuendo se aumenta en una unidad el dígito del sustraendo. Es importante que se practiquen ambos métodos dado que en un centro determinado pueden emplearse métodos de resta que no sean el que habitualmente empleemos.

$$12367_{(9} - 4282_{(9} = 7075_{(9} \quad o \quad 700A1_{(14} - C9AB_{(14} = 614C4_{(14}.$$

Nota 1.2.2. *La segunda resta es conveniente pensarla porque cuando no podemos reducir el digito de la posición anterior a aquella en la que nos encontramos dos dígitos que no se pueden restar directamente, el segundo método considerado es más conveniente mientras que el primero mencionado implica hacer manipulaciones más complejas. Pensadlo en base 10 con por ejemplo 2001 - 73 sin asumir cuál será la respuesta.*

3. `La multiplicación`: Dicha operación es interna, conmutativa y asociativa como lo es la suma. Dicha operación se puede introducir básicamente como sumas reiterativas y ver todas sus propiedades de una forma gráfica empleando cubos o cuadrados es muy conveniente (ver diapositivas) incluso con figuras geométricas.

4. `La división`: esta operación se ha mencionado en clase cómo realizarse y no se aadirá en estas notas pero se recomienda que se analice cómo uno divide y qué operaciones realiza, lógicamente debemos detener en cuenta que aparecerá un cociente y un resto al dividir el dividendo por el divisor y que el resto r debe ser menor que el divisor y positivo o nulo. únicamente se recordará que la división surge de la necesidad de distribuir n objetos en k montones iguales, dicha operación no siempre es exacta. La división en los naturales se llama `división entera` y como se indica más información pueden encontrarse en la presentación.

1.2.1 Traducción de la base b a la base 10 y viceversa.

Al igual que vimos con las agrupaciones en la base, aplicaremos el mismo algoritmo. Es decir, si queremos pasar de la base b a la base 10 pondremos las unidades, le sumaremos las decenas por la base, luego las centenas por la base al cuadrado, etc. Por ejemplo:

$$6A0B1_{(13} = 1 + 11 \times 13^1 + 0 \times 13^2 + 10 \times 13^3 + 6 \times 10^4,$$

y el resultado de estas operaciones da un número que es el valor que representa dicho número en la base 10.

La operación inversa, es decir, de la base 10 a la base b es más sencilla y consiste en ir dividiendo el número dado en la base 10 por la base tantas veces como sea necesario y la representación del número en la base b será tomar el último cociente y los sucesivos restos en sentido inverso hasta completar todas las divisiones, y tal número será el que represente al número original en dicha base b.

Ejemplo 1.2.3. *Expresar en la base 13 al número 6512. Pues la primera división resulta:*

$$6512 = 13 \times 500 + 12, \quad 500 = 13 \times 38 + 6, \quad 38 = 13 \times 2 + 12.$$

Y 2 'no' se puede dividir por 13 luego es el último cociente así la representación de 6512 en base 13 será

$$6512 = 2C6C_{(13}.$$

Nota 1.2.3. *Lógicamente en la base 13, el resto 12 debe traducirse al dígito C.*

1.2.2 Ejercicios de final de tema.

En esta sección resolveremos algunos de los problemas relacionados con el primer tema.

Ejemplo 1.2.4. *En la serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6,... ¿qué número aparece en la posición 249?*

Dichos valores son los restos al dividir por 6 menos los números que son múltiplos de 6 que vale 6, y como 249 = 6 x 41 +3, entonces en la posición 249 tendremos el 3.

Ejemplo 1.2.5. *Sabiendo que* $8888888884302 = 1119789479 \times 7938$*, ¿cuál es el cociente y el resto de dividir* 8888888894302 *entre* 7938*?*

Dado que la diferencia entre 8888888894302 y 8888888884302 es de 10000 donde hay un grupo de 7938 y sobran 2062, entonces el resto es 2062, y el cociente es 1119789480 (una unidad más que es la que he agrupado).

Ejemplo 1.2.6. *Un ciclista parte de un punto A con velocidad uniforme de 18 km/h hacia otro punto E. Dos horas después sale de A hacia E otro ciclista con velocidad uniforme. Si sabemos que el primer ciclista tuvo un pinchazo que le hizo pararse durante media hora (justo cuando salió el otro ciclista), y que el segundo ciclista le alcanzó después de pedalear 2 horas y cuarto, ¿a qué velocidad iba el segundo ciclista?*

Tras dos horas la distancia entre los ciclistas es la distancia recorrida por el primero, o sea, 36 Km. Está claro que el segundo ciclista si alcanza al primero ha de ir más rápido que el primero. Si llamamos $v = v_2 - v_1$ *a la velocidad relativa del segundo ciclista con respecto a la del primer ciclista, entonces ....*

2

Los números enteros ($\mathbb{Z}$). Divisibilidad. La división como proceso de agrupación

1. Introduccin y operaciones elementales en los enteros: Lgicamente la evolucin de las economas en tiempos ancestrales estuvo ligada con la evolucin de los sistemas numricos y se cree que fue debido a esto fue la razn de introducir los nmeros enteros, que son los nmeros ?-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ? Un posible significado del signo podra estar asociado al hecho de deber una determinada cantidad. A parte del hecho de dar respuesta a las necesidades de clculo en la prctica y las necesidades de completar la aritmtica, puesto que introduciendo este conjunto de nmeros la resta se converta en una operacin interna. Una pregunta frecuente suele ser cmo introducir adecuadamente los nmeros enteros en primaria. Fijmonos que este es el que podra ser el primer concepto abstracto con el que se enfrenta un estudiante durante su vida (como detalle histrico ya hace aos los matemticos discutieron sobre si los nmeros enteros eran o no nmeros). Una vez introducida su grafa debemos introducir el cmo operar con ellos. Una forma adecuada es introducirlos mediante una adecuada representacin grfica (ver diapositivas), ver la recta de los enteros. Tan pronto el concepto queda claro utilizando pares de nmeros en dicha recta podemos hablar del concepto de valor absoluto de un nmero entero que siempre es un valor no negativo, y solo valdr cero para el nmero 0. Desde luego quiz la nica dificultad en la operacin con los enteros est vinculada a los signos y es claro que es un problema serio pues dicho problema persiste en individuos adultos con un nivel cultural medio–alto. Debido a la claridad de las diapositivas no entraremos a hablar acerca de cmo operar con los nmeros enteros pero cualquier duda puede preguntarse al profesor que os imparta la asignatura pero el tipo dificultad debera ser menor. 1. Divisibilidad de los nmeros enteros: En primer lugar debemos mencionar que el objetivo de esta seccin es la de ser capaces de saber cundo un nmero es primo o compuesto, cuntos divisores tiene, cuales son propios o no, y conocer los criterios bsicos de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 11, y 25. Def: Un nmero se dice primo si es solo divisible por el 1 y por si mismo, en otro caso se dice compuesto. Por ejemplo el 5 es primo y el 100 compuesto.?El nmero 1 se excluye de ambas definiciones por ser la unidad en los enteros bajo la multiplicacin (x). Se pueden encontrar aplicaciones y ms informacin acerca de los nmeros primos en las transparencias, por ejemplo para qu se utilizan. El primer resultado que debemos conocer es el teorema fundamental de la aritmtica que nos dice que todo nmero natural mayor que uno (1) se puede descomponer en factores primos. Adems si el nmero ?n? es compuesto

entonces el menor primo que lo divide es, a lo ms, la raz cuadrada de n). Ejemplo: deducir si el nmero 563 es primo o compuesto, y descomponerlo en factores primos si es compuesto. Dado que est entre 23 y 24 entonces basta con realizar la divisin de 563 por cada primo comprendido entre el 2 y el 23. Y resulta que no es divisible por ninguno de ellos por tanto el nmero es primo. Ejemplo: obtener la composicin en factores primos del nmero 5544. Pues dado que es divisible por 2 y 3 (porque es par y la suma de sus dgitos es mltiplo de 3), lo dividimos quedando 5544 = 2 x 3 x 924. De nuevo 924 es mltiplo de 6 por las mismas razones, as 924 = 2 x 3 x 154. Ahora 154 = 2 x 77 = 154 2 x 7 x 11, y por tanto 5544 = 23 x 32 x 7 x 11. Una forma de construir los nmeros primos y quiz la primera conocida es la criba de Eratstenes que consiste en escribir la lista de todos los nmeros entre dos valores dados e ir eliminando los mltiplos de cada primo conocido, quedando finalmente una lista de nmeros que son primos (ms informacin en wikipedia) Es importante comprender la jerga empleada para expresarnos correctamente cuando hablamos de divisibilidad. Def: Diremos c—b si c divide a b, o c es un divisor de b, o b es un mltiplo de a. Es claro que si c es un divisor de a, tambin lo es de cualquier mltiplo suyo (c—k a). Como propiedades que deberemos conocer estn las siguientes: Si c—a y c—b, entonces c—(a+b), y ms generalmente c—(ka+jb) siendo k y j nmeros enteros cualesquiera. Def: Dos funciones con las que trabajaremos son el mximo comn divisor (m.c.d.) y el mnimo comn mltiplo (m.c.m.). Basta leer su nombre para entender cmo definirlas, es decir, m.c.d.(a,b) es el mayor divisor comn posible, est claro que el 1 es un divisor comn por tanto el resultado siempre es un nmero entero. Y el m.c.m.(a,b) es el menor de los mltiplos comnes de ambos nmeros. Est claro que ab es un mltiplo de a y de b, por tanto el menos divisor comn de ste ser el m.c.m. de ambos nmeros. Ejemplo: m.c.d.(24,90) = m.c.d.(23 x 3, 2 x 32 x 5) por tanto el resultado es 2 x 3 =6. Adems gracias a la identidad m.c.d.(a,b) x m.c.m.(a,b) = a x b, podemos obtener el m.c.m.(24,90) = 24 x 90 /6 = 360. Pero claro uno no siempre es capaz de descomponer un nmero en factores primos. Ejemplo: Intentar con m.c.d.(729,3803). Por esa razn sera ideal conocer otra forma de calcularlo. Dicha tcnica es la conocida como Algoritmo de Euclides que consiste en ir realizando determinadas divisiones e ir utilizando los restos para obtener dicho valor (ms informacin en wikipedia), adems puede leerse ms detalladamente en las diapositivas del tema. Ahora daremos los criterios de divisibilidad ms conocidos que se explicaron en clase y se ?probaron? utilizando de alguna forma la expresin en la base 10 de tales nmeros: ? Un nmero es divisible por 2(es par) si el dgito de las unidades es divisible por 2, es decir, es 0, 2, 4, 6, 8. ? Un nmero es divisible por 3 (resp. por 9) si la suma de sus dgitos es mltiplo de 3 (resp. por 9). ? Un nmero es divisible por 5 si el dgito de las unidades es divisible por 5, es decir, 0 5. ? Un nmero es divisible por 11 si la suma de los dgitos en posicin par menos la suma de los dgitos en posicin impar es divisible por 11. !Ojo! El hecho de que haya criterios donde solo se mire el dgito de las unidades no quiere decir que esto se pueda aplicar a la ligera para comprobar la divisibilidad por otros nmeros. 1. Congruencias (o residuos) Este punto est bastante bien explicado en las transparencias y no repetir lo mismo, pero bsicamente podemos concluir que: ? Si tomamos dos cantidades a y b y queremos calcular el resto que resulta de dividir a+b por n, podemos simplemente efectuar la divisin de a por n y la divisin de b por n, tomar los restos resultantes y est ser mdulo n el resto de a+b por n. Ver las agrupaciones en las diapositivas. ? Si tomamos dos cantidades a y b y queremos calcular el resto que resulta de dividir a x b por n, podemos simplemente efectuar la divisin de a por n y la divisin de b por n, tomar los restos resultantes y est ser mdulo n el resto de a x b por n. Ver las agrupaciones en las diapositivas. ? Esto tambin es aplicable a las restas. O sea, que si dos nmeros a y b son iguales mdulo n, es decir a ? b mod n estamos queriendo decir que si tomamos a - b, o b - a, y lo dividimos por n el resultado debe ser 0 de resto. Por ejemplo: 9 ? 5 mod 4, pues 9 - 5 es mltiplo de 4. 13 ? -8 mod 21, pues 13 - (-8) es mltiplo de 21, etc. Ejemplo: Calcular el resto de dividir 7132 x 3210 - 2221 por 7. Pues bien dado que el resto al dividir por 7 el nmero 7132 es 6, el del nmero 3210 es 4, y el del nmero 2221 es 2, entonces dicha operacin es igual a 7132 x 3210 - 2221 mdulo 7 ? 6 x 4 - 2 mdulo 7

? 1 mdulo 7. Cualquier cuestin que tengas no dudes en ponerte en contacto con tu profesor de teora. Ejercicios de final de tema: 1. Busca tres ejemplos de nmeros que tienen un nmero impar de divisores (positivos). Sabras decir qu tienen en comn todos los nmeros con una cantidad impar de divisores? Como ejemplos nos sirven el 4 (divisores: 1, 2, 4), el 9 (divisores: 1, 3, 9), y el 16 (divisores: 1, 2 , 4, 8, 16). Todos tienen en comn que son cuadrados perfectos, aunque la respuesta igualmente vlida es que todos los exponentes que tienen los factores primos son pares, por ejemplo 36 (divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36). 1. Cuntos divisores tiene el nmero 3528? Cuntos de ellos son mltiplos de 21? Dado que 3528 = 23 x 32 x 72 , entonces el nmero tiene (3+1)x(2+1)x(2+1) =36 divisores, para saber cules son mltiplos dividimos el nmero por 21 y calculamos el nmero de divisores del nuevo nmero: 3528/21 = 168 = 23 x 3 x 7 que tiene (3+1)x(1+1)x(1+1) = 16 divisores, as 3528 tiene 16 divisores mltiplos de 21. 1. Encuentra tres ejemplos de nmeros que tengan 12 divisores. Cul es el entero positivo ms pequeo que tiene 12 divisores? Los nmeros 211, 33 x 52, y 2 x 3 x 52 tienen 12 divisores. Y por la estructura del nmero 12 los posibles nmeros que pueden tener exactamente 12 divisores son de la forma: p11, p5 x q, p3 x q2, p x q x r2 donde p, q y r son 3 primos distintos. De hecho tomando los valores de los primos p, q y r ms pequeos resulta que el nmero ms pequeo con 12 divisores es 60. 1. Demuestra que la suma de tres nmeros pares consecutivos es un mltiplo de 6. Dado que tres nmeros pares consecutivos se pueden escribir de la forma 2n, 2n + 2, y 2n + 4, la suma de estos es 6n + 6 que es claramente mltiplo de 6. 1. En el contorno de un campo trapezoidal cuyos lados miden 72, 96, 120 y 132 m., respectivamente, se han plantado rboles igualmente espaciados. Calcula el nmero de rboles plantados, sabiendo que hay uno en cada vrtice y que la distancia entre dos consecutivos es la mxima posible. Si estn alejados lo mximo posible y en cada esquina de cada lado del trapecio hay un rbol debemos entonces debemos calcular el m.c.d. de las cuatro cantidades que resulta ser 12, luego hay en cada lado 7, 9, 11 y 12 rboles respectivamente (contando el de cada esquina hay que sumarle uno a cada total) y as un total de 35 rboles en el permetro. 1. Un faro emite seales diferentes: la primera cada 18 seg., la segunda cada 50 seg. y la tercera cada 2 minutos 50 seg. Estas seales coinciden a las 0:01 horas. a) Cuntas veces coinciden durante un da completo? Coincidirn las tres en un nmero de segundos mltiplos de 18, 50, y de 170, o sea, mltiplo del m.c.m.(18,50,170) = 7650 segundos. Dado que un da tiene 24 x 60 x 60 = 86400 segundos y 86400/7650 = 11,2941 entonces las tres seales coinciden en un da 11 veces. b) Si llego a las 21 h, en qu momento las veo coincidir por primera vez? Como 21h = 21 x 60 x 60 = 75600 segundos, algo ms que la decima vez que coinciden que fue a los 76500 segundos, entonces la diferencia es de 900 segundos, y como coincidieron por primera vez a las 00:01, o sea un minuto trs medianoche, debemos aadir a los 900 segundos 60 segundos resultando 960 segundos = 15 minutos. Es decir que las tres seales coincidieron a las 21h15. 1. Qu nmeros de la forma 387a65b dan resto 1 al dividir por 5 y resto 4 al dividir por 9? Si al dividir el nmero por 5 resulta 1 de resto, entonces b =1 b = 6. Por otro lado como al dividir por 9 resulta resto 4, y dicho resto sale congruente mdulo 9 igual a la suma de los dgitos del nmero entonces 3 + 8 + 7 + a + 6 + 5 + b = 4 mod 9, es decir a + b = 2 mod 9. Aqu tenemos que distinguir dos casos: ? Si b = 1, entonces a = 1 mod 9, y dado que a es un dgito entonces a = 1. Nmero: 3871651 ? Si b = 6, entonces a + 6 = 2 modulo 9, por tanto a = 4 mdulo 9, y al ser un dgito entonces a = 4. Nmero: 3874656 1. El calendario gregoriano (el nuestro). Adems de los aos bisiestos, existen otros aos especiales: los seculares. Estos son los mltiplos de 100, y solo son bisiestos los mltiplos de 400. Por ello, el 2000 fue bisiesto, pero el 2100 no lo ser. Sabiendo que el 1 de noviembre de 2011 es martes, qu da de la semana ser el 1 de noviembre de 3011? Entre las dos fechas hay 1000 aos, de los cuales 250 son mltiplos de 4, 10 son mltiplos de 100, y solo 2 mltiplos de 400 (2400, 2800) as hay 8 aos seculares que debemos quitar de los mltiplos de 4. Es decir, en 1000 aos hay 242 aos bisiestos. Y como los aos bisiestos tienen un da ms en 100 aos hay 1000 x 365 + 242 = 365242 das. Para saber qu da es el 1 de noviembre de 3011, basta con obtener el resto de dividir este ltimo nmero por 7 que resulta ser 3, por tanto el 1 de noviembre de 3011 ser viernes.

3

Los números racionales ($\mathbb{Q}$)

Para leer acerca de la motivacin de la introduccin de los nmeros racionales vea las diapositivas del tema. Pero est claro que es claro que este tema es uno de los ms importantes por diversas razones, la primera se debe al hecho de que se suele introducir mal el concepto y el cmo se operan, y el segundo que nos suele costar operar an conociendo las operaciones con nmeros racionales, y cometemos errores en la interpretacin de los resultados. 1. Introduccin y definiciones Una fraccin es el cociente de dos nmeros enteros a y b, esto es a/b, siendo b no nulo pues en dicho caso la fraccin no existe. La interpretacin de dicho nmero parece ser clara, o sea, todo el mundo entiende que una fraccin de algo (que puede ser continuo o discreto) es una parte de dicho algo, luego se asume que dicho nmero es menor que uno y positivo. A partir de esa idea se construyen los nmeros racionales que no dejan de ser en el caso de las fracciones, su interpretacin numrica dentro de la recta de los nmeros reales . El principal problema de las fracciones es que no hay unicidad en su escritura, es decir, que hay varias fracciones que toman el mismo valor numrico, luego es el mismo nmero racional, por ejemplo 2/3 = 4/6 = 6/9 = ? Por esa razn es por la que se suele definir el conjunto de los nmeros racionales a travs de una relacin de equivalencia, y a tal conjunto se denota por Las fracciones que hemos escrito antes son equivalentes, dicho concepto es quiz uno de los ms importantes de este tema, por eso hacemos nfasis en l. Para saber si dos fracciones, a/b y c/d, son equivalentes o no, basta comprobar si ad = cd no lo es. Una vez entendidos los conceptos de fraccin y de fraccin equivalente, el comprender cmo sumar o restar fracciones debera ser inmediato ya que solo pueden sumarse o restarse fracciones con el mismo denominador, as que no lo son debemos tomar fracciones equivalentes a las primeras cuyos denominadores sean iguales lo cual siempre puede conseguirse. Ejemplo: 2/3 + 3/4 = 8/12 + 9/12 = 17/12. Como dijimos en un principio las fracciones toman su valor entre 0 y uno, cuando esto no es as se denominan fracciones impropias, es decir cuando la fraccin es de la forma a/b y a¿b. Estos se representan como nmeros mixtos. Ejemplo: 17/12 = 1 . As si a¿b, entonces se pueden dividir quedando a = q x b + r, y por tanto dicha fraccin se escribe q . Est claro que dicho proceso es mecnico y sencillo! pero no hay que recordar que el valor de una fraccin impropia de un todo es algo ms que el todo en s mismo, una cosa que deberemos preguntarnos es qu significa ocho sptimos de algo?. La multiplicacin de fracciones es algo ms sencilla seguirlas a travs de las diapositivas donde se refleja con claridad cmo calcularla, sin embargo la divisin de fracciones no es algo tan obvio, lo que debemos tener en cuenta es que dividir un nmero por 1/n es lo mismo que multiplicar dicho nmero por n, as si tenemos que dividir a/b por m/n nos resulta la multiplicacin de a/b x n/m. A continuacin hablaremos de las fracciones decimales que son aquellas que tienen como denominador una potencia de 10, por ejemplo 2/100, 43/1000, ? (para ver ms seguir las transparencias). Antes de pasar a las proporciones, veamos un ltimo resultado fundamental. Teorema: La expresin decimal de cualquier nmero racional es, o bien ?nita, o bien peridica (pura o mixta). De hecho, el nmero que tiene una cantidad finita de decimales admite de una forma elemental una representacin como fraccin decimal, mientras que una que sea peridica requiere analizarla con algo de detenimiento. Por ejemplo: el nmero x=2?3747474747474? primero tomamos 1000 x = 2374?7474747474? Por tanto si restamos este ltimo a 10 x (para evitar el 3 en la expresin decimal del nmero) con el original se tiene 990 x = 2374 -23 = 2351, y por tanto x = 2351/990. Esta es la forma habitual para traducir un nmero peridico puro o mixto en una fraccin genrica (o sea, real o impropia). 1. Proporcionalidad Este captulo se puede seguir perfectamente con las diapositivas. De lo poco relevante que podemos decir aqu es que debemos evitar utilizar las reglas de tres, y entender cuando una proporcin es directa o inversa. Tan pronto lo tengamos claro el tema estar prcticamente zanjado. 1. Porcentajes Aqu igualmente tendremos en cuenta que un porcentaje es un valor que suele venir representado por una fraccin, aunque en ocasiones pueden utilizarse fracciones impropias, cuando tomemos hablemos por ejemplo de situaciones de la vida real en los que aplicamos porcentajes sobre cantidades previas a las finales en cuyo caso salen porcentajes asociados a fracciones impropias. Se recomienda para la segunda parte del tema seguir las diapositivas y realizar los ejercicios planteados en el tema. Ejercicios de final de tema:

4

Introducción al álgebra

Prácticas de Matemáticas I.
Grado en Magisterio de Ed. Primaria

Práctica 1.1 `La base b`

1. Indica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

   (a) En la base 10 hay más de 10 dígitos. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

   (b) Los dígitos en la base 4 son $\{0,1,2,3,4\}$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

   (c) Los dígitos en la base 7 son $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

   (d) No se puede representar un número de la base 10 en otra base. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

   (e) Si un número es pr en la base 10, puede no serlo en otra base. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

   NOTA: Este problema es útil para conocer los fundamentos de la base *b*.

2. Escribe en base 7 los 10 números predecesores del número $45_{(7}$ y en base 12 los 20 antecesores de $91A_{(12}$.

3. Al escribir los números en base 3, ordenados de mayor a menor, nos encontramos con este hueco en la lista: $1020_{(3},\ldots\ldots\ldots,121_{(3}$,. Escribe (tambin ordenados) los números que deberan estar en el hueco.

4. En la serie $1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,6,\ldots$ qu número aparece en la posición 249? Repite el problema con la posición 522.

5. Efectúa los siguientes cambios de base (para la base 16, utiliza los caracteres A, B, C, D, E, F para las cifras $10,\ldots,15$):

   a) 3763 en base 8.

   b) 99 en base 2.

   c) $3021_{(4}$ en base 7.

   d) $221002_{(3}$ en base 16.

6. Calcula: a) $100110_{(2}+11101_{(2}$. b) $354024_{(6}+450354_{(6}$. c) $A7F_{(16}+BC2_{(16}$.

7. Calcula: a) $6417_{(8}-3245_{(8}$. b) $20120021_{(3}-10202122_{(3}$. c) $E72_{(16}-BCF_{(16}$.

8. ($\star$) En qué base b el número $21_{(7}$ se escribe $14_{(b}$?

   NOTA: Problema importante, necesitamos saber traducir números de cualquier base a la base 10 y viceversa.

9. ($\star$) Toma tu DNI, llama M al número formado por los primeros 4 dígitos del DNI, y N al número formado por los últimos 4 dígitos del DNI. Si tu DNI tiene letra menor, o igual, que N trabaja en la base 11, en otro caso en la base 12. Asumiendo que los números tomados están en dicha base, calcula en dicha base (11 o 12) la resta

   $$M-N$$

   Nota: Si alguno de los números tomados comienza por 0, no deseches dicho dígito.

10. Expresa en base 10 el mayor número que se puede escribir con 8 dgitos en base 3.

    NOTA: Este problema es importante pues requiere entender el concepto de dígito y tener cierta capacidad de lógica.

Práctica 1.2 `La división (entera) y su relación con el proceso de agrupar`

1. Plantea dos problemas que se resuelvan con una división, en los que el enunciado trate sobre una estantería y unos libros. En uno de ellos, la división debe ser de tipo partitivo; en otro, cuotativa.

2. ($\star\star$) Un ciclista parte de un punto **A** con velocidad uniforme de 18 km/h hacia otro punto **E**. Dos horas despus sale de **A** hacia **E** otro ciclista con velocidad uniforme. Si sabemos que el primer ciclista tuvo un pinchazo que le hizo pararse durante media hora, que lo arregló antes de que el segundo ciclista lo alcanzase, y que éste le alcanz despus de pedalear 2 horas y cuarto. ¿a qu velocidad iba el segundo ciclista?

   Resuelve el problema asumiendo dos escenarios: el primero que el pinchazo suceddió antes de que el segundo ciclista saliera, y el segundo que lo arregló despues de que éste saliese. Razona los resultados.

3. El mayor número primo conocido en la actualidad es $2^{57885161}-1$ (fue encontrado el 25 de enero de 2013). El número tiene 17425170 dígitos. Da una estimación de cuántas hojas ocuparía escrito en un cuaderno, y de cuánto tiempo tardarías en copiarlo.

   NOTA: Dar la solución exácta es poco relevante, lo importante es la idea del ejercicio.

4. ($\star\star$) Sabiendo que $1261541 = 4897 \times 257 + 3012$, ¿cuáles son el cociente y el resto en la divisin de 126154100 entre 489700? Y de la divisin de 12615410 entre 2570? Resuelvelo sin realizar la división.

5. Sabemos que al dividir D entre d el cociente es 82 y el resto es 45. Sabemos adems que el dividendo D es menor que 4500. Encuentra, de manera razonada, el conjunto de pares (D,d) que cumplen estas condiciones.

   NOTA: Este ejercicio es más importante de lo que parece, hay que entender el rol que tiene el divisor y el resto en una división.

6. ($\star$) Encuentra el menor número mayor que 700 que da resto 5 al dividirlo por 23.

7. ($\star$) Sabiendo que $8888888884302 = 1119789479 \times 7938$, ¿cuál es el cociente y el resto de dividir 8888888894302 entre 7938? (Para contestar no hace falta hacer la divisin).

8. Me dieron un saco lleno de monedas de 1 euro, y me dijeron que si lo reparta entre 6 me sobraran 2, si lo reparta entre 8 me sobraran 2 y si lo reparta entre 15 me sobraran tambin 2. Si adems sabemos que tena ms de 500 euros pero menos de 1000, cuntas monedas poda haber en el saco?

9. Tengo en un depósito con 450 litros de refresco. Cuántas botellas de 3/4 de litro podré rellenar?

10. Un grupo de amigos compraron 12 pizzas y se las repartieron por igual. Si cada amigo comió $3/5$ de pizza, ¿cuántos amigos eran en el grupo?

Práctica 2.1 `Aritmética y divisores de números naturales`

1. Calcula:

   (a) $-2\times(4\div(2\times 3-8)-2\times(4+5\times(-2)-14))$.

   (b) $4\div 2+6\times 3\times(2-5\times 4\div 2)-3\times(3+5\times(4-7))$.

2. Representa en la recta de los enteros el conjunto de números enteros que verifica la desigualdad $|a|\leq 4$. Repite el ejercicio, ahora con el conjunto $|a|\geq 5$.

3. Encuentra todos los números primos mayores que 500 y menores que 520.

4. ($\star$) Busca tres ejemplos de números que tienen un número impar de divisores (positivos). ¿Sabrías decir qué tienen en común todos los números con una cantidad impar de divisores?

5. Encuentra todos los divisores de 990.

6. ¿Cuántos divisores pares tiene el número 504? ¿Cuáles son?

7. ($\star\star$) ¿Cuántos divisores tiene el número 3528? ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 21?

8. Encuentra todos los divisores comunes de los números 990 y 880. Repite el problema, para los números 420, 540 y 605.

9. ($\star\star\star$) Encuentra tres ejemplos de números que tengan 12 divisores. ¿Cuál es el entero positivo más pequeo que tiene 12 divisores?

   Repite el problema para los números con 30 divisores.

10. ($\star$) Encontrar un número que tenga 40 divisores y, de estos, exactamente 10 sean impares.

Práctica 2.2 `Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo`

1. ($\star\star\star$) Demuestra que si tomamos al azar tres números impares consecutivos siempre hay uno de ellos que es mltiplo de 3.

2. ($\star$) Demuestra que la suma de tres nmeros pares consecutivos es un mltiplo de 6.

3. ($\star$) Calcula, en funcin de a, $\mathrm{mcd}(a, a+3)$ sin aplicar ningn algoritmo, slo la definicin de mximo comn divisor.

   Qu valores puede tomar $\mathrm{mcd}(a, a+6)$?

4. Determina todas las parejas de enteros positivos cuyo mximo comn divisor es 14 y cuyo mnimo comn mltiplo es 2310.

5. Se dice que dos enteros a y b son *coprimos* o *primos entre s* si $\mathrm{mcd}(a,b) = 1$. Encuentra todos los enteros de dos cifras y mayores que 60 que sean coprimos con 15.

6. Calcula $\mathrm{mcd}(1287, 975)$ y $\mathrm{mcd}(10241, 6370, 7497)$ utilizando los dos algoritmos: la descomposicin en factores primos y el algoritmo de Euclides.

7. Encuentra todos los nmeros impares que sean divisores comunes de los nmeros 19800, 41140 y 83600.

8. Calcula el mnimo comn mltiplo de 851 y 943.

9. Un faro emite seales diferentes: la primera cada 18 seg., la segunda cada 50 seg. y la tercera cada 2 minutos 50 seg. Estas seales coinciden a las 0:00 horas.

   (a) Cuntas veces coinciden durante un da completo?

   (b) Si llego a las 21 h, en qu momento las veo coincidir por primera vez?

10. Tenemos una habitacin rectangular, de 4’75 m. de largo y 3’23 m. de ancho. Queremos poner un suelo de baldosas cuadradas, y queremos hacerlo sin tener que partir ninguna y utilizando baldosas tan grandes como sea posible.

    a) De qu tamao seran las baldosas?

    b) Cuntas baldosas tendras que encargar?

Práctica 2.3 `Trabajando con los restos y otros conceptos`

1. Dos personas empiezan a correr a la vez en un circuito de 1 km. de largo. La primera tarda en cada vuelta 3 min. 41 seg., y la segunda 5 min. 23 seg. Qu distancia ha recorrido la ms rpida cuando vuelven a coincidir en la salida?

2. Qu nmeros de la forma $387a65b$ dan resto 1 al dividir por 5 y resto 4 al dividir por 9?

3. Hallar dos números tales que su suma sea 1090 y su mc.m. sea 4200.

4. Si hoy estuvieran alineados el Sol, Venus, la Tierra y la galaxia de Andrmeda, qu da de la semana sera en la siguiente alineacin? (Suponed que el periodo de rotacin de la tierra es de exactamente 365 das, que el de venus es 584 y que la galaxia de Andrmeda est fija).

5. El calendario gregoriano (el nuestro). Adems de los aos bisiestos, existen otros aos especiales: los aos seculares. Los aos seculares son los mltiplos de 100, y slo son bisiestos los mltiplos de 400. Por ello, el 2000 fue bisiesto, pero el 2100 no lo ser. Sabiendo que el 1 de noviembre de 2011 es martes, qu da de la semana ser el 1 de noviembre de 3011?

6. Encuentra todos los nmeros que se escriban $a387b672c$, que sean divisibles por 2 y por 9, y que tengan resto 2 al dividir entre 5. (a, b y c son dgitos del 0 al 9).

7. Cmo se podra calcular el resto al dividir por 6 de un nmero, conocidos sus restos al dividir por 2 y al dividir por 3? Indicacin: estudia por separado cada uno de los posibles restos al dividir por 6.

8. Si hoy es lunes, y son las 9 de la mañana, qué día de la semana será dentro de 10000 horas?

9. Encontrar dos números de cuatro cifras mayores de 4900 que al dividirlos por 11 tengan de resto 1, y al dividirlos por 7 tengan de resto 3.

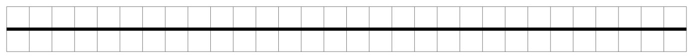
10. Sabiendo que $277 \times 36 = 9972$, encuentra el menor número de 5 cifras que da resto 20 al dividirlo entre 36.

Práctica 3.1 `Fracciones`

1. Efecta las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma de fraccin irreducible.

   a) $\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{9}+\frac{3}{8}-\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+\frac{1}{5}}$ b) $\dfrac{\frac{2}{3}\div(\frac{5}{4}-\frac{1}{3})+3}{2+\frac{1}{5}\times(\frac{1}{3}+2)}$

2. Utiliza la cuadrícula de la figura para representar la suma de fracciones $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$.



3. Averigua cuál es la menor para cada una de las siguientes parejas de fracciones (evita hacer cuentas innecesarias).

   a) $\dfrac{6789}{6790}$ y $\dfrac{34567}{34568}$ b) $\dfrac{2500}{4998}$ y $\dfrac{10000}{19998}$

4. ¿Es $\frac{72}{450}$ fracción decimal? En caso afirmativo, exprésala con denominador de la forma 10^k.

5. En la figura se representan dos números racionales, A y B. Determina, en cada caso, en qué intervalo están los números $A\times B$, A/B y B/A.

(a) (b) (c)

6. En una clase, 4 de cada 10 alumnos son chicos. De los chicos, 3 de cada 10 llevan gafas. Si hay 9 chicos que llevan gafas, ¿cuántas chicas hay en la clase?

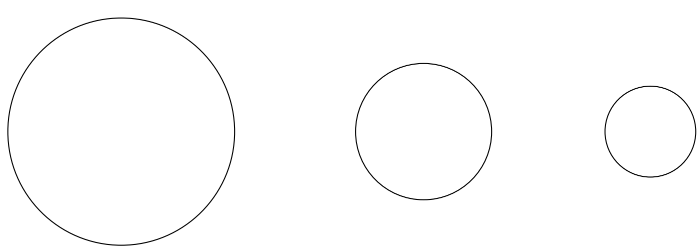
7. En una planta depuradora de aguas residuales el tratamiento del agua se realiza en tres etapas. En una primera se quitan los $9/10$ de los fostatos. En la segunda se quitan los $3/4$ de los que quedan, y en la tercera se quitan $1/2$ de lo que an llevaba el agua. Qu fraccin de los fosfatos permanece en el agua despus del proceso completo?

8. Una finca está dividida entre tres hermanos. El primero posee un tercio de la superficie total, y no está cultivada porque la dedica a la caza. El segundo es dueño de 2/5 del resto, dedica la mitad de su parte al cultivo de cereales y en la otra mitad hay un pinar. La parte del tercero son 72 hectáreas, y dedica 2/9 de ellas a cultivar cereales.

   a) ¿Cuál es la superficie total de la finca?
   b) ¿Qué proporción de la finca está dedicada al cultivo de cereales?

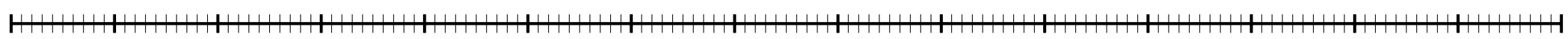
9. Calcula y expresa como fracción irreducible: $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{7}\times\dfrac{9}{8}-2\times\left(\dfrac{1}{12}-\dfrac{7}{3}\right)-1.$

10. En la figura se muestran tres tartas. Colorea $1/4$ del total. Explica el razonamiento utilizado.



Prctica 3.2 Números racionales

1. Eligiendo la escala más adecuada, representa en la figura los números 3’0053, 3’0267, 3’1104, 3’0809, 2’9609.



2. Representa como una fracción irreducible los siguientes números racionales (la barra es aquí la notación para el periodo):

   a) $2'73$ b) $2'\overline{47}$ c) $2'4\overline{7}$ d) $0'2\overline{9}$

3. Una persona deja en herencia $2/3$ de su capital a su único hijo, le deja a un tío lejano $2/5$ partes de lo que le ha dejado al hijo, debe pagar a hacienda por impuestos $1/20$ de la herencia, y dona el resto, 12000 euros, a una obra de beneficencia. ¿Cuál era su capital?

4. En la clase de 2°A, por cada 3 alumnos que han aprobado las matemáticas hay 2 que las han suspendido. En la clase de 2°B, por cada 4 alumnos que han aprobado hay 3 que las han suspendido. Si $4/9$ de los alumnos van al grupo A (y el resto al grupo B), ¿qué proporción de alumnos han aprobado el examen?

5. Explica cómo llegar de la expresión numérica $2'3\overline{41}$ a la fracción $\dfrac{1159}{495}$.

6. Escribe tres nmeros decimales que sean mayores que $3'201$ y menores que $3'20105$.

7. Calcula $3'27 \times 2'4$, y aproxima el resultado con una cifra decimal.

8. La empresa de Javier está atravesando dificultades. No han despedido a nadie pero, por segundo año consecutivo les han bajado el sueldo el 10%. Si ahora gana 1200 euros, ¿cuál era su sueldo hace dos años? (Es suficiente que calcules con 1 cifra decimal).

9. Encuentra un número de cuatro cifras decimales que sea mayor que $1'2\overline{69}$ y menor que $1'27$.

10. Escribe la expresión decimal de las siguientes fracciones:

    a) $\dfrac{1}{11}$ b) $\dfrac{1}{111}$ c) $\dfrac{1}{1111}$ d) $\dfrac{1}{11111}$

    Describe la expresión decimal de la fracción $1/N$, donde N es el nmero formado por N unos.

Práctica 3.3 `Proporcionalidad y porcentajes`

1. Hice un viaje a una velocidad constante y tardé 5 horas. Si un amigo fue a una velocidad un 20% superior ¿Cuánto tardó?

2. Si la temperatura se mantiene constante, la presión y el volumen de un gas son magnitudes inversamente proporcionales. Si la presión de un gas aumenta el 30% ¿Cuánto disminuye su volumen?

3. Un país con 6 millones de habitantes necesita importar 120 millones de barriles de petróleo para cubrir su consumo de 5 meses ¿Cuántos barriles de petróleo necesitaría un país de 5 millones de habitantes, para cubrir el consumo de 4 meses, si el consumo por habitante es el mismo?

4. Tengo 120 euros, y los quiero repartir entre Luis y Jaime.

   (a) ¿Cómo debo hacerlo, si quiero darle a Luis el doble que a Jaime?

   (b) ¿Cómo debo hacerlo, si quiero darle a Luis el 40% más que a Jaime?

5. Al examen de junio de matemáticas se presentan 4 de cada 5 alumnos matriculados, y por cada 7 alumnos que aprueban hay 2 que suspenden. ¿Qué fracción de los alumnos matriculados aprueban en junio?

6. Si preparamos una sangría con la siguiente receta: 2 medidas de zumo, 1 medida de ginebra (con 2/5 de alcohol) y 5 medidas de vino (con 1/8 de alcohol), ¿cuál será la proporción de alcohol en la bebida resultante? Da el resultado como fracción irreducible.

7. Un grupo de tres amigos hace un trabajo por el que les pagan 224 euros. Si el primer amigo trabajó 3 horas, el segundo 5 y el tercero 8, ¿cómo deberían repartirse el dinero?

8. Con una manguera de caudal 8 litros/minuto tardamos 1/5 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaremos con una manguera de caudal 5 litros/minuto?

9. Sabemos que un camión cisterna pequeño llena un depósito de gasoil en 5 horas, uno mediano tarda 3 horas y uno grande llena el mismo depósito en 2 horas. Un día llegan llegan tres camiones (uno de cada tipo) y se ponen a rellenar el depósito al mismo tiempo. ¿Cuánto tardan en llenarlo? Expresa el resultado en horas, minutos y segundos.

10. Una ciudad medieval dispone de provisiones para 6 meses. Justo antes de ser sitiados por un ejército enemigo, la cuarta parte de su población huye, y al verse sitiados deciden reducir la ración diaria a 2/3 de la prevista. ¿Cuánto tiempo les durarán las provisiones?

Práctica 3.4 `Problemas de proporcionalidad y porcentajes`

1. © Una lámina metálica de 80 cm de largo y 60 de ancho se calienta de tal forma que la longitud de sus lados aumenta el 5%. ¿Cuánto aumenta su superficie? ¿Cuál es el porcentaje de aumento de la superficie?

2. © Tenemos un vaso en forma de cilindro, y diseñamos otro aumentando el radio un 10% y disminuyendo la altura también un 10%. ¿Cómo cambia el volumen?

3. © Las letras del tesoro se emiten al descuento. Esto quiere decir que si compras una letra de 100 €, pagas por ella una cierta cantidad, y al cabo de un año te pagan esa cantidad, el capital, junto con los intereses correspondientes, que hacen un total de 100 €. Si compras una letra a 12 meses por 97 €, y al cabo de un año te dan los 100 €, ¿qué interés anual te están pagando?

4. © El precio de un coche nuevo pierde el 20% de su valor por cada año que pasa (es decir, al cabo de 3 años vale el 20% menos que al cabo de 2 años). ¿Cuántos años deben de pasar para que el valor del coche se reduzca a menos de 1/4 de su valor original?

5. © Si el PIB de un país creciera al 3% anual, ¿cuántos años tardaría en duplicarse?

6. © Cuando se pagaba un IVA del 8%, el precio del corte de pelo en una peluquería era de 10 €(IVA incluido). El 1 de septiembre del 2013 el IVA de las peluquerías subió al 21%, y ahora te cobran 11'30 €, diciéndote que lo único que han hecho ha sido subir el IVA correspondiente. Han actualizado bien el precio?

7. © Quiero ingresar hoy en el banco una cantidad de dinero, para garantizar que dentro de 20 años tendré disponibles 30000 €. El banco me garantiza un interés del 5% anual que ingresa cada año en la misma cuenta, y sé que no pagaré impuestos hasta que retire el dinero. En el momento de retirar el dinero, deberé pagar un 16% de impuestos. ¿Cuánto debo ingresar hoy en el banco?

8. ($\star\star$) Ana y Juan son dos trabajadores de una misma empresa. Sabemos que Ana gana el 14% más que lo que gana Juan. Teniendo esto en cuenta, ¿Qué porcentaje menos gana Juan respecto a lo que gana Ana? Expresa el resultado con, al menos, dos cifras decimales.

9. Tres trabajadores construyen 200 metros de valla en 9 horas. Calcula:
   a) ¿Cuánta valla construyen dos trabajadores en 6 horas?
   b) ¿Cuánto tardan cuatro obreros en construir 80 metros de valla?
   c) ¿Cuántos obreros son necesarios para construir 70 metros de valla en 5 horas?