1. A partir de la gráfica de la función $g(x) = x^2$ construye las gráficas de las siguientes transformaciones: $g(x \pm a)$, $g(x) \pm a$.

   Dadas las siguientes funciones, exprésalas como transformaciones de la función $g(x)$ y represéntalas:

   (a) $f(x) = x^2 + 2$ (d) $f(x) = x^2 - 3$ (g) $f(x) = (x + 4)^2$

   (b) $f(x) = (x - 3)^2$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$ (h) $f(x) = -(x - 3)^2 + 2$

   (c) $f(x) = (-x + 2)^2$ (f) $f(x) = (x + 2)^2$ (i) $f(x) = (3x)^2$

2. Determina analítica y gráficamente los dominios de las funciones:

   (a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (d) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$

   (b) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 2}$

   (c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2 - x}}$ (f) $f(x) = \log(x + 2) + \log(x - 2)$

3. Estudia las simetrías de las siguientes funciones :

   (a) $f(x) = 3x - x^3$ (b) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$ (c) $f(x) = \log\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

4. Considere las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ y $h(x) = \operatorname{sen}(x)$. Calcula las siguientes composición de funciones $f \circ g, f \circ g \circ h$, y $f \circ h + h \circ g$.

5. Halla la función inversa, f^{-1}, de las siguientes funciones, especificando su dominio de definición:

   (a) $y = 2x + 3$ (b) $y = x^2$ (c) $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ (d) $y = \sqrt{1 - x^2}$.

6. Sea $f(t) = \cos(\theta_1\, t) + \cos(\theta_2\, t)$. Comprueba que f es una señal periódica y los valores θ_1, θ_2 son tales que $\dfrac{\theta_1}{\theta_2} \in \mathbb{Q}$. ¿Es periódica la señal $f(t) = \cos(10\,t) + \cos(10 + \pi)t$?

   Calcula el periodo de $f(t) = \operatorname{sen}(\frac{\pi t}{2}) + \cos(\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{3}))$.

7. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ \\ 1, \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

8. Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ si } x \leq 1 \\ k + x\ , \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

   sea continua.

9. Representa las siguientes funciones definidas a trozos e indica los intervalos en los que son continuas:

$(a)\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad (b)\ f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{si } x \geq 1 \\ x^3, & \text{si } x < 1 \end{cases}$ $\quad (c)\ f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{3} + 1, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} - 1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

10. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{5}{x-1}$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-3}{3x+5}\right)^{\frac{3x-4}{5x}}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+6}{5}\right)^{\frac{5-2x}{3x+4}}$

(e) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+6x+9}{x+3}$

(f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} - \tan x$

(g) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-2}{x+5}\right)^{\frac{4x-1}{3}}$

(h) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$

(i) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+7}{5x-3}\right)^{\frac{6x+5}{7}}$

(j) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x}$

(k) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x-1} - 3x$

(l) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1}$

(m) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$

11. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0} \tan(\pi)$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{2-x}$

(c) $\lim_{x\to \pi} \exp(\cos(x))$

(d) $\lim_{x\to 5} x^2 - 3x$

(e) $\lim_{x\to -2} x\sqrt{x+4}\sqrt[3]{x-6}$

(f) $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

(g) $\lim_{x\to 8} 1 - \sqrt[3]{x}$

(h) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x}{x^2-6x+5}$

(i) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\cos(x))$

12. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to\infty} x^5 - 2x^2$

(b) $\lim_{x\to -\infty} x^5 - 2x^2$

(c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^5-2x^2}{x^2-2x-3}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5-2x^2}{x^2-2x-3}$

(e) $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4+3x^3+10x^2}{x^5-8x^2}$

(f) $\lim_{x\to 0^-} \frac{6x^4+3x^3+10x^2}{x^5-8x^2}$

(g) $\lim_{x\to 2} \frac{6x^4+3x^3+10x^2}{x^5-8x^2}$

(h) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^5-2x^2}{x^2-2x-3}$

(i) $\lim_{x\to -\infty} \frac{6x^4+3x^3+10x^2}{x^5-2x^2}$

13. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - x - 7}{7x - x^2}$

(b) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - x^5 - 7}{x^5 - x^4 + 3x}$

(c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2 - x^3 - 7}{x^2 - x^4 + 3x}$

(d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^5 - x^4 + 3x}{x^2 - x^5 - 7}$

(e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2 + x^3 - 4}{x^2 - 2x^4 + x}$

(f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4 - x^3 - 7}}{x^2 - x + 3}$

(g) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - 4x} - x$

(h) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 4x} - x$

(i) $\lim_{x\to-2^-} \dfrac{3x^2 + x^3 + x - 2}{x^4 - 3x^3 - 25x^2 - 32x - 4}$

14. Sean f y g dos funciones

(a) Si no existe $\lim_{x\to p} f(x)$ ni existe $\lim_{x\to p} g(x)$, ¿pueden existir $\lim_{x\to p}(f(x) + g(x))$ y $\lim_{x\to p}(f(x)g(x))$?

(b) Si existe $\lim_{x\to p} f(x)$ y no existe $\lim_{x\to p} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to p}(f(x) + g(x))$?

(c) Si existe $\lim_{x\to p} f(x)$ y $\lim_{x\to p}(f(x) + g(x))$, ¿debe existir $\lim_{x\to p} g(x)$?

(d) Si existe $\lim_{x\to p} f(x)$ y $\lim_{x\to p}(f(x)g(x))$, ¿debe existir $\lim_{x\to p} g(x)$?

15. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, indicando en cada caso los tipos de discontinuidad que presentan. En el caso de discontinuidades evitables, determinar el valor que hace continua la función:

(a) $f(x) = |x - a|, \quad a \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

(c) $f(x) = \dfrac{1 - 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{|x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 0 \\ a + x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

16. Estudia si las siguientes funciones están acotadas superior e inferiormente (en los intervalos indicados) y si es posible calcular cotas para sus valores máximo y mínimo :

(a) $y = x^2 \quad -1 < x < 1$

(b) $y = x^2 \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $y = x^2 \quad x \geq 0$

(d) $y = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq a \\ a + 2, & \text{si } x > a \end{cases}$

17. En el intervalo $[0, 1]$ se definen las siguientes funciones:

(a) $y = 2x - 3$

(b) $y = x^2 - 2x + 1$

(c) $y = x^3 - \dfrac{1}{2}$

(d) $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

(e) $y = e^{-x^2}$

Comprueba que son monótonas en dicho intervalo y, como consecuencia, halla sus máximos y los mínimos.

18. Construye una función real continua en todo punto del intervalo $[-1, 1]$ salvo en el 0, que tome valores de distinto signo en -1 y 1 y que no se anule en ningún punto.

19. Determina los valores del número real k para los cuales la función $p(x) = x^3 - 3x + k$ se anula en algún punto de $[-1, 1]$.

20. Comprueba que existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(x) = x - 1$.