1. Calcular, utilizando la definición rigurosa de derivada, las derivadas de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = 1 - 3x^2$

   (b) $f(x) = \dfrac{3+x}{1-3x}$

   (c) $f(x) = \sqrt{1+2x}$

   (d) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

2. Estudiar las derivadas por la derecha y por la izquierda en $x_0 = 0$ de las funciones:

   (a) $y = |x|$

   (b) $y = x^{\frac{1}{n}}, \quad n \geq 2$

3. Estudiar las derivadas por la derecha y por la izquierda en $x_0 = 0$ de la función $y = (x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ definida en un entorno de $x_0 = 0$. ¿Es continua en $x_0 = 0$?.

4. Calcular los valores reales de a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, \text{ si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b}, \text{ si } 0 < x \leq 2 \\ -\dfrac{x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}, \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

   sea continua en la recta real. ¿En qué puntos es derivable la función resultante?

5. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x), \text{ si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

   hallar los valores reales de a y b para que la función f sea continua y derivable en $x = 0$.

6. Dada la la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, \text{ si } x \leq 1 \\ \ln(x), \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

   hallar los valores de a y b para que f sea continua y derivable en $x = 1$.

7. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 20x^2 + ax + b, \text{ si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

   hallar los valores de a y b para que f sea continua y derivable en el intervalo $(0, 2)$.

8. Estudia para qué valores reales de a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ si } x \leq a \\ 2ax - 2a + 1, \text{ si } x > a \end{cases}$$

   es continua. En estos casos, dibuja las gráficas de las funciones obtenidas. ¿En algún caso es f derivable en $x = a$?

9. Estudiar la derivabilidad y continuidad de:

$$y = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

10. Sea $f(x) = |x|^3$. Comprobar que existen la primera y segunda derivada para todo valor de x, salvo $f^{(3)}(0)$ que no existe.

11. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \tan(x)$ en el punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

12. Hallar en qué puntos la tangente a la curva $y = x^3 + 5$ es:

    a) Paralela a la recta $12x - y = 17$.

    b) Perpendicular a la recta $x + 3y = 2$.

13. ¿Para qué valores reales de a la parábola $y = ax^2$ es tangente a la curva $y = \log(x)$?.

14. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

    (a) $y = 3x$

    (b) $y = 4x^{12}$

    (c) $y = 8 - x^2 + 4x^3$

    (d) $y = (4x+1)^3$

    (e) $y = x^2(3x-5)$

    (f) $y = 4x^{12}$

    (g) $y = \dfrac{2}{x^3}$

    (h) $y = \sqrt[4]{2x^3}$

    (i) $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + 5$

    (j) $y = \left(\dfrac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$

    (k) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

    (l) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

    (m) $y = \mathrm{sen}(\cos^2(x)) \cdot \cos(\mathrm{sen}^2(x))$

    (n) $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

    (o) $y = \log(\sqrt[4]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}), \quad |x| > 1$

    (p) $y = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

15. Calcular la derivada de las siguientes funciones utilizando derivación logarítmica:

    (a) $y = x^{\sqrt{x}}$

    (b) $y = (\ln(x))^x$

    (c) $y = (\mathrm{sen}(x))^x$

16. Comprobar que:

    (a) $(\mathrm{sen}\,x)^{(n)} = \mathrm{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

    (b) $(\cos\,x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

17. Calcular la derivada n-esima de las siguientes funciones:

(a) $y = \text{sen}(2x)\cos(4x)$

(b) $y = e^{mx}$

(c) $y = \dfrac{x}{x^2-4}$

(d) $y = \arctan(x)$

(e) $y = \log(x^3+6x^2+11x+6)$

(f) $y = x^3\text{sen}(x)$

18. Se considera la función real $f(x) = x^n(1-x)^m+1$. Aplicar el teorema de *Rolle* para comprobar (sin calcular la derivada) que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0,1)$.

19. Aplicar el teorema de *Rolle* para comprobar que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1,1]$.

20. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de f para $x \in [0,2]$. Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.

21. Sea $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Probar que $f(1) = f(-1) = 0$, y que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [-1,1]$. Explicar por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de *Rolle*.

22. Aplicar el teorema del valor medio a $y = (x^2+9)^{\frac{1}{2}}$ en $[0,4]$, hallando los puntos intermedios.

23. Sea f una función real derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y tal que $f(0) = 0$ y $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Comprobar que $|f(x)| < |x|$ para todo x no nulo.

24. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ con $a_i \in \mathbb{R}$. Comprobar que si

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

entonces la ecuación $p(x) = 0$ tiene al menos una raíz en $(0,1)$.

25. Probar que $x^2 = x\,\text{sen}(x) + \cos(x)$ tiene exáctamente dos soluciones reales.

26. Establecer las siguientes desigualdades, utilizando el teorema del valor medio:

a) $|\text{sen}(x) - \text{sen}(y)| \leq |x-y| \quad$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

b)
$$1 - \frac{a}{b} \leq \log\frac{b}{a} \leq \frac{b}{a} - 1, \qquad \text{para} \qquad 0 < a \leq b.$$

c)
$$nxy^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x-y) \quad \text{si} \quad 0 < x \leq y \quad \text{y} \quad n = 1, 2, \cdots.$$

d)
$$\frac{1}{\cos^2(a)} \le \frac{\tan(b)-\tan(a)}{b-a} \le \frac{1}{\cos^2(b)} \quad \text{con} \quad 0 < a \le b \le \frac{\pi}{2}.$$

27. Sea f una función continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$ tal que $f(0)=0$ y f' es creciente. Comprobar que la función $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ es creciente.

28. Comprobar que $g(x)=2\arctan(x)+\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$, $x\in[1,\infty)$, es una función constante.

29. Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea el máximo posible.

30. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que pueda inscribirse en una semicircunferencia de radio a.

31. Determinar a,b,c,d de modo que la curva $y=ax^3+bx^2+cx+d$ presente un máximo y un mínimo en $(0,4)$ y $(2,0)$ respectivamente.

32. Entre todos los rectángulos de perímetro dado P, ¿cuál es el de mayor área?.

33. Obtener, en el intervalo $[-2,2]$, el menor y mayor valor de la distancia entre el punto $(0,1)$ y la parábola $y=x^2$.

34. Con una cartulina de 60cm de lado se desea construir una caja de base cuadrada que tenga la máxima capacidad posible. Determinar las medidas.

35. De entre todas las latas cilíndricas de un litro de capacidad, determinar las dimensiones de la de menor coste de producción.

36. Una señal ha de ser transmitida de A a B a través de un punto P situado en la línea de tierra. ¿Dónde se situará este punto para que el camino recorrido sea mínimo?.

37. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan(x)}{x-\operatorname{sen}(x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}(x)-e^x}{(\arctan(x))^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos(1/x)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}-\frac{1}{x^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\arctan(x))^{\frac{1}{\log(x)}}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\log x)^{\frac{1}{1-\log x}}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\tan(x))^{\operatorname{sen}(2x)}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}$

(m) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+ax^2}-\sqrt[3]{x^3-ax^2})$

38. Obtener el desarrollo de $MacLaurin$ de orden n de las siguientes funciones:

(a) $y = e^x$

(b) $y = \text{sen}(x)$

(c) $y = \cos(x)$

(d) $y = \cosh(x)$

(e) $y = \text{senh}(x)$

(f) $y = \dfrac{1}{1-x}$

(g) $y = \arctan(x)$

(h) $y = \log(1+x)$

con resto de *Lagrange*.

39. Comprobar los siguientes polinomios de $Taylor$ en $x = 0$:

(a)
$$T_n(a^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\log(a))^k}{k!} x^k$$

(b)
$$T_n\left(\frac{1}{1+x}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

(c)
$$T_{2n+1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$$

(d)
$$T_n(\log(1+x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

(e)
$$T_{2n+1}\left(\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

(f)
$$T_n\left(\frac{1}{2-x}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{2^{k+1}}$$

(g)
$$T_n((1+x)^a) = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{a}{k} x^k$$

(h)
$$T_{2n}(\text{sen}^2 x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$$

(i)
$$T_n(\log(1-x)) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

(j)
$$T_{2n+1}(\arctan(x)) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

40. Obtener el desarrollo de $Taylor$ de $f(x) = (\log(x))^2$ en $x_0 = 1$ hasta el lugar de las derivadas de orden cuatro, con resto de *Lagrange*.

41. Obtener el desarrollo de $Maclaurin$ de $y = \text{sen}(x^2)$ hasta el lugar cuarto. Dad una mayoración del resto.

42. Escribir el polinomio $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ en potencias de $x - 2$.

43. Haciendo uso de la fórmula de $Taylor$ para la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ calcula aproximadamente $(1,03)^{\frac{1}{3}}$. Situando el término complementario en el lugar de las derivadas terceras, estimar el error cometido.

44. Calcular aproximadamente $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ con un error menor que $0,0001$.

45. Estudia la función:

$$f(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\ e^{-x}$$

determinando su dominio, corte con los ejes, máximos y mínimos locales, intervalos de crecimiento y decrecimiento, dibujando de forma esquemática la gráfica. A partir de la gráfica anterior, y sin dar valores, dibujar aproximadamente las funciones siguientes:

$$h_1(x) = \left((x-1)^2 + (x-1) + 1\right)\ e^{-(x-1)} \quad , \quad h_2(x) = \left(x^2 - x + 1\right)\ e^{x}$$

explicando razonadamente cómo se han obtenido.

46. Representa gráficamente las funciones siguientes estudiando su dominio, imagen, simetrías, periodicidad, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos (relativos y absolutos), puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(b) $f(x) = x^2(x-1)^2$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$

(d) $f(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$

(e) $f(x) = x\exp(-x)$

(f) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

(g) $f(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$

(h) $f(x) = \arctan(x)$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

(j) $f(x) = \dfrac{x^4}{1-x^2}$

(k) $f(x) = x\sqrt{x-1}$

(l) $f(x) = x\exp\left(\frac{1}{x}\right)$

(m) $f(x) = x\ln(x)$

(n) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$