Universidad LOYOLA	# Universidad Loyola Titulación: **Grado en Datos y Analítica de negocio** Asignatura: **Álgebra** Curso: **Primero** Fecha: **03/11/2023**

Apellidos:________________ Nombre:________________ Grupo: ________

Instrucciones

- **En este documento se deben escribir las soluciones** en la zona indicada para ello.
- El desarrollo teórico debe realizarse en las hojas adicionales. El razonamiento supondrá hasta el 40 % de la nota y hasta el 60 % la solución aportada.
- Los apartados pueden realizarse en el orden que se desee.
- Se recomienda que apartados distintos se realicen en caras de folio distintas.

Ejercicio práctico I. ⟨ 4 puntos ⟩ Consideramos en el espacio $\mathbb{R}^5$ el espacio vectorial V generado por las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_4 = 0, \\ x_1 + x_5 = 2x_3, \\ 2x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 4x_3 \end{cases}$$

Se pide:

I) (2 punto) Demuestre que V es un espacio vectorial, y calcule su dumensión.

Sol: Es un espacio vectoerial, pues es un subespcio vectorial de $\mathbb{R}^5$ al que se le han añadido las ecuaciones indicadas en el ejercicio, por tanto es un espacio vectorial.

Para calcular la dimensión de dicho espacio construimos la matriz asocida a las ecuaciones del espacio vectorial y aplicamos el método de eliminación de Gauss-Jordan obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, como hay tres columnas libres de pivotes, la dimensión de V es 3.

II) (2 puntos) Halle una base y unas ecuaciones paramétricas de V.

Sol: Si intercambiamos las filas primera y segunda en el apartado anterior, tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto las ecuaciones paramétricas son:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2\lambda_3 - \lambda_5, \lambda_2, \lambda_3, 0, \lambda_5).$$

Por lo tanto una base es:

$$\mathcal{B} = \{(0,1,0,0,0), (2,0,1,0,0), (-1,0,0,0,1)\}.$$

Ejercicio práctico II. ⟨ 3 puntos ⟩ Sean B_1 y B_2 dos bases de un mismo espacio vectorial siendo

$$B_1 = \{(2,0,1,0,0), (-1,1,0,0,1), (0,1,1,0,2)\},$$

$$B_2 = \{(1,-1,1,0,1), (3,2,1,0,-1), (-3,1,0,0,3)\}.$$

I) (1 punto) Halle las ecuaciones de cambio de base de B_2 a B_1.

Sol: El vector genérico de B_1 que tiene coordenadas $(x,y,z)_{B_1}$ es de la forma

$$x(2,0,1,0,0) + y(-1,1,0,0,1) + z(0,1,1,0,2) = (2x - y, y + z, x + z, 0, y + 2z).$$

Por tanto, el vector $(1,-1,1,0,1)$ de la base B_2 tiene coordenadas respecto la base B_1: $x = -1$, $y = -3$ y $z = 2$, luego $(1,-1,1,0,1) = (-1,-3,2)_{B_1}$.

De forma análoga: $(3,2,1,0,-1) = (4,5,-3)_{B_1}$, $(-3,1,0,0,3) = (-2,-1,2)_{B_1}$.

Así las ecuaciones que necesitamos son:

$$x' = -x + 4y - 2z,$$

$$y' = -3x + 5y - z$$

$$z' = 2x - 3y + 2z$$

II) (1 punto) Halle la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

Sol: Repetimos el proceso obteniendo

$$M_{B_1,B_2} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

III) (1 punto) Encuentre todos los vectores tales que $(x, y, z)_{B_1} = (z, y, x)_{B_2}$.

Sol: Si es así entonces

$$(2x - y, y + z, x + z, 0, y + 2z) = (-3x + 3y + z, x + 2y - z, y + z, 0, 3x - y + z),$$

igualando las componentes se tiene: $x = y = z$ por tanto la respuesta es

$$(x, x, x)_{B_1} = (x, 2x, 2x, 0, 3x) = (x, x, x)_{B_2}.$$

Ejercicio práctico III. $\langle$ 3 puntos $\rangle$ Obtenga una base de la imagen y otra base del núcleo del endomorfismo cuya matriz es:

$$M = \begin{pmatrix} 20 & -4 & 19 & -20 \\ 5 & -1 & 6 & -5 \\ 15 & -3 & 13 & -15 \\ 10 & -2 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

Sol: Aplicamos el método de Gauss-Jordan, obteninedo:

$$M = \begin{pmatrix} 20 & -4 & 19 & -20 \\ 5 & -1 & 6 & -5 \\ 15 & -3 & 13 & -15 \\ 10 & -2 & 7 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & -4 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & -4 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto la imagen de M es $\{(20, -4, 19, -20), (5, -1, 6, -5)\}$, aunque hay otras opciones para la respuesta.

El núcleo de M está generado por: $\{(1, -1, -1, 0), (0, 1, -1, 1)\}$. Basta escribir las ecuaciones del núcleo que tiene como matriz la matriz traspuesta de M, aplicar Gauss-Jordan, y resolver el sistema para $x_1 = 1$ y $x_4 = 0$, y para $x_1 = 0$ y $x_4 = 1$.