Universidad de Alcalá **Curso 2018-19**

Matemáticas I **Magisterio (Ed. Primaria)**

Problemas adicionales

1. En cierto sistema de numeración las cifras del 1 al 9 se escriben α, β, γ, δ, ϵ, ζ, η, ι, κ. Los símbolos para las potencias de 10 son Γ (10), Δ (100), Λ (1000) y Π (10000). Escribe el número 43867 en un sistema aditivo y en otro aditivo-multiplicativo.

2. ($\star\star\star\star$) Encuentra todos los números capicúas de 5 cifras en base 3 que sean pares. Expresa el mayor de ellos en base 10.

   Sol: Son de la forma $ab0ba_{(3}$ y $ab2ba_{(3}$ donde a puede ser $1, 2$ y b puede ser $0, 1, 2$. El mayor es $22222_{(3} = 242$.

3. En base 5, ¿cuántos nu?meros de 2 cifras son mayores que $24_{(5}$?

4. ($\star$) Encuentra todos los números capicúas de 4 cifras en base 3 y exprésalos en base 10.

   Sol: Hay 6 números. Por ej: $2112_{(3} = 2 \times 3^3 + 3^2 + 3 + 2 = 95$.

5. Imagínate que tienes una calculadora en la que solo puedes teclear números de dos cifras. Explica cómo harías la siguiente multiplicación: 8700036×48.

   Sol: 87×48, 36×48 y sabiendo la posición de los ceros lo sumas.

6. Completa los recuadros en la siguiente suma de dos números en base 8.

$$\begin{array}{rcccccl} & 5 & \square & 2 & 6 & \square & _{(8} \\ + & \square & 2 & \square & 3 & 4 & _{(8} \\ \hline 1 & 3 & 0 & 4 & \square & 1 & _{(8} \end{array}$$

   Sol: $56265_{(8} + 52134_{(8} = 130421_{(8}$.

7. En base 5, ¿cuántos números son mayores que $23_{(5}$ y menores que $42_{(5}$?

8. Si sabemos que $23145_{(6} + N = 40053_{(6}$, ¿cómo se expresa N en base 6? (Debes hacer los cálculos necesarios en esa misma base).

   Sol: $12504_{(6}$.

9. Calcula $2_{(5} \times (40420_{(5} - 13234_{(5})$.

10. Rellena los huecos en la siguiente operación en base 9:

$$\begin{array}{cccccc} & 7 & \square & 8 & 0 & 2_{(9} \\ - & 5 & 5 & \square & \square & 4_{(9} \\ \hline & 1 & 8 & 0 & 2 & \square_{(9} \end{array}$$

Sol: $74802(9 - 55764_{(9} = 18027_{(9}$.

11. `(Junio 2012-13)` Rellena los huecos en la siguiente operación en base 9:

$$\begin{array}{cccccc} & 7 & \square & 8 & 0 & 2_{(9} \\ - & 5 & 5 & \square & \square & 4_{(9} \\ \hline & 1 & 8 & 0 & 2 & \square_{(9} \end{array}$$

    Sol: En el orden de aparición de izquierda a derecha: 4, 7, 6, 7.

12. (*) Construir la lista de los números de dos dígitos predecesores de $31_{(4}$ en la base 4.

    Sol: $\{10_{(4}, 11_{(4}, 12_{(4}, 13_{(4}, 20_{(4}, 21_{(4}, 22_{(4}, 23_{(4}, 30_{(4}, 31_{(4}\}$

13. `(Enero 2013-14)` Rellena los huecos en la siguiente operación en base 8:

$$\begin{array}{cccccccc} & & 7 & \square & 4 & 3 & \square & 6_{(8} \\ + & & \square & 2 & 5 & \square & 7 & \square_{(8} \\ \hline & 1 & 1 & 6 & \square & 0 & 3 & 2_{(8} \end{array}$$

    Sol: $734336_{(8} + 225474_{(8} = 1162032_{(8}$.

14. `(Enero 2012-13)` Si sabemos que $23145_{(6} + N = 40053_{(6}$, ¿cómo se expresa N en base 6? (Debes hacer los cálculos necesarios en esa misma base).

    Sol: $N = 40053_{(6} - 23145_{(6} = 12504_{(6}$.

15. `(Parcial 2012-13)` Calcula en la base 11 la resta: $4000502A_{(11} - 1010A0A3_{(11}$.

16. `(Junio 2013-14)` Calcula $213417_{(8} - 177774_{(8}$.

17. `(Parcial 2013-14)` Calcula en la base 11 la resta: $7005008_{(11} - 101A023_{(11}$.

    Sol: $7005008_{(11} - 101A023_{(11} = 5A95A95_{(11}$.

18. `(Parcial 2013-14)` Cuenta de dos en dos en base 5, empezando en el $31_{(5}$ y terminando en el $112_{(5}$.

    Sol: Puede hacerse sumando de uno en uno y luego seleccionar los que van de dos en dos.

$$31_{(5}, 33_{(5}, 40_{(5}, 42_{(5}, 44_{(5}, 101_{(5}, 103_{(5}, 110_{(5}, 112_{(5}.$$

19. `(Junio 2014-15)` Encuentra un número en base 11 que tenga tres dígitos, no contenga al dígito 0, y expresado en base 10 sea capicúa. Escribe la solución en base 10.

    Sol: Hay muchos, 343, 454, etc.

20. `(Junio 2014-15)` Calcula en base 5 el número: $(44_{(5)})^4$.

    Sol: $41104101_{(5}$

21. `(Junio 2015-16)` Toma los últimos cuatro dígitos de tu DNI. Si la letra de tu DNI es anterior o igual a la N, asume que dicho número está en la base 11, en otro caso asume que está en la base 12. Describe el proceso de cómo pasar dicho número a la base 9. Calcula también dicho número.

    Sol: Si el DNI fuese 12345678Z, entonces trabajaremos en la base 12 donde los dígitos son $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B\}$. En este caso el número a considerar es el $5678_{(12}$. Primero tenemos que escribirlo en ase 10:

    $$5678_{(12} = (8 + 7 \times 12) + (6 \times 12^2 + 5 \times 12^3) = 92 + (6 + 5 \times 12) \times 12^2 = 92 + 66 \times 144$$

    que resulta 9596. Para pasarlo a la ase 9 tenemos que ir agrupando de 9 en 9 y quedándonos con los restos que son los que nos van dando la información de los dígitos en dicha base. Así

    $$9596 = 9 \times 1066 + \mathbf{2},\ 1066 = 9 \times 118 + \mathbf{4},\ 118 = 9 \times 13 + \mathbf{1},\ 13 = 9 \times \mathbf{1} + \mathbf{4}.$$

    Por lo tanto $5678_{(12} = 9596 = 14142_{(9}$.

22. `(Parcial 2014-15)` Calcula en base 12 la resta: $7005008_{(12} - 10BB024_{(12}$.

    Sol: $5B05BA4_{(12}$.

23. `(Parcial 2014-15)` ($\star\star$) Encontrar un ejemplo de número natural capicúa que tenga 4 dígitos en base 4 y que su expresión en base 10. sea divisible por 25.

    Sol: Solo hay dos posibles: $1331_{(4}$, y $2112_{(4}$.

24. `(Parcial 2014-15)` ($\star$) Sabiendo que el número $321_{(4}$ puede escribirse de la forma $xx_{(b}$. Encontrar razonadamente los valores de x y b.

    Sol: $x = 3$ y $b = 18$

25. `(Enero 2015-16)` Completa los recuadros en la siguiente suma de dos números en base 8.

$$\begin{array}{ccccccc} & 3 & \square & 0 & 0 & 1 & 3_{(11} \\ - & \square & \mathrm{A} & \square & 0 & \square & \mathrm{A}_{(11} \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \square & 1 & \square_{(11} \end{array}$$

    Sol: $3\mathbf{0}0013_{(11} - \mathbf{1}A\mathbf{9}0\mathbf{A}A_{(11} = 101\mathbf{A}1\mathbf{4}_{(11}$.

26. `(Parcial 2016-17)` Calcula en la base 8 la operación: $460057_{(8} - 254365_{(8}$.

---

27. ($\star$) Un astronauta hizo un viaje de 505 horas. Si despegó a las 8 de la mañana, ¿qué hora era cuando aterrizó?

    Sol: Las 9 de la mañana.

28. Sabiendo que $876 \times 299 = 261924$, encuentra de manera razonada (sin hacer la división) el cociente y el resto que resulta de dividir 262924 entre 299.

29. `(Parcial 2016-17)` Encuentra la base b para la cual se tiene $11111_{(7} = 88_{(b}$.

    Sol: Dado que en la base 10 ambos números son de la forma

    $$11111_{(7} = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 1 + 56 + 49 * 8 = 2801, \quad y \quad 88_{(b} = 8 + 8b$$

    y el primer número no es múltiplo de 8, $\boxed{\text{el problema no tiene solución}}$.

30. ($\star\star$) Determina el menor número natural que multiplicado por 7 nos da un número natural que se escribe solo con el dígito 3. Repite el problema, pero con el dígito 4.

    Sol: 333333, 444444

31. Supongamos que en este momento son las 10:00 am. ¿Qué hora será dentro de 2500 horas? ¿Y qué hora fue hace 2500 horas?

32. © Un coche sale desde Madrid, hacia Barcelona, a las 12 h. y viaja a una velocidad constante de 105 km/h. A las 13:30 sale otro coche, desde Barcelona hacia Madrid. Este segundo coche viaja a una velocidad constante de 120 km/h. Si la distancia entre Madrid y Barcelona es de 620 km. ¿A qué distancia de Barcelona se encontrarán? Debes resolver este problema con métodos de primaria.

    Sol: 241, 76

33. ¿Cuántos divisores impares tiene el número 26460? ¿Cuál es el mayor divisor impar de dicho número?

34. `(Parcial 2017-18)` Encuentra el menor número natural que tenga exactamente 35 divisores y sea múltiplo de 35.

    Solución: Aplicaremos la teoría de divisibilidad visto en clase. Dado que $35 = 7 \times 5$, el menor múltiplo de 35 con 35 divisores será $\mathbf{5^6} \times \mathbf{7^4}$.

35. `(Enero 2012-13)` Encuentra el menor número mayor que 700 que da resto 5 al dividirlo por 23.

    Sol: Dado que $700 = 10 + 23 \times 30$, si sumamos 18 tenemos el resultado deseado, así la respuesta es 718.

36. Sabiendo que $42638 = 11 \times 3876 + 2$, ¿cuál es el cociente y el resto de dividir 4263800 entre 387600?

37. `(Junio 2014-15)` Escribe los números primos entre 340 y 355.

    Sol: 347, 349, 353.

38. ¿Cuántos divisores pares tiene el número 61740?

39. Encuentra el mayor número primo menor que 170.

40. ($\star\star$) Tenemos una cantidad de monedas desconocida. Pero las hemos agrupado de 7 en 7 y nos han sobrado 2, las hemos agrupado de 5 en 5 y nos han sobrado 2, y las hemos agrupado de 11 en 11 y no nos han sobrado monedas. Sabiendo que no tenemos mas de 800 monedas ni menos de 700. ¿cúantas monedas tenemos?

41. Busca dos ejemplos de números que tienen un número par de divisores (positivos), que sean divisibles por 28 y mayores que 300.

    Sol: 448, 1372, ...

42. Encuentra los números primos mayores que 220 y menores que 270.

43. (`Parcial 2017-18`) Calcula los números primos entre el 230 y el 260.

    Solución: Aplicaremos la Criba de Ratostenes. Primero eliminamos en ese listado los múltiplos de 2, 3 y 5. Quedando

$$233 \xrightarrow{+6} 239 \xrightarrow{+2} 241 \xrightarrow{+6} 247 \xrightarrow{+4} 251 \xrightarrow{+2} 253 \xrightarrow{+4} 257 \xrightarrow{+2} 259.$$

Y ahora vemos los restos al dividir por 7, primero dividimos 233 entre 7, y nos queda tras saber la distancia entre números

$$2 \xrightarrow{+6} 8 \rightarrow 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+6} 9 \rightarrow 2 \xrightarrow{+4} 6 \xrightarrow{+2} 8 \rightarrow 1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+2} 7 \rightarrow \mathbf{0}.$$

Por tanto $259 = \dot{7}$. Ahora lo realizamos con el 11, y sus restos son

$$2 \xrightarrow{+6} 8 \xrightarrow{+2} 10 \xrightarrow{+6} 16 \rightarrow 5 \xrightarrow{+4} 9 \xrightarrow{+2} 11 \rightarrow \mathbf{0} \xrightarrow{+4} 4.$$

Por tanto $253 = \dot{11}$. Seguimos con el 13 una vez que eliminamos los que no son primos

$$12 \xrightarrow{+6} 18 \rightarrow 5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+6} 13 \rightarrow \mathbf{0} \xrightarrow{+4} 4 \xrightarrow{+6} 10.$$

Por tanto $247 = \dot{13}$. Cuando dividimos 233 pr 17 el cociente es menor que 13 así que este es el último primo por el que realizaremos la criba:

$$12 \xrightarrow{+6} 18 \rightarrow 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+6} 9 \xrightarrow{+4} 13 \xrightarrow{+6} 19 \rightarrow 2.$$

Por tanto los primos son

$$\mathbf{233}, \mathbf{239}, \mathbf{241}, \mathbf{251}, \mathbf{257}.$$

44. (`Enero 2014-15`) Escribe la lista de los números primos mayores que 440 y menores que 470.

45. (`Junio 2012-13`) Encuentra todos los números primos de dos dígitos que dan resto 5 al dividirlos por 23.

    Sol: Las posibilidades eran: 5, 28, 51, 74, 97. Y el único primo es el 97.

46. ($\star\star\star$) Calcular, si existen, números de la forma 123yx32 que son múltiplos de 6 y al dividirlos por 9 dan resto 4.

    Sol: No existen

47. Un vendedor de naranjas quiere saber cuántas naranjas tenía ayer. Solo recuerda que eran más de 100 pero menos de 150 y que cuando hacía montones de 2, 3, 4, 5, 6 naranjas siempre sobraba 1. ¿cuántas naranjas tenía el tendero?

48. Ves un astronauta que aterriza un miércoles a las 8 de la tarde, y te cuenta que su viaje ha durado exactamente 910 horas. ¿Qué día de la semana y a qué hora empezó su viaje?

49. Encuentra tres ejemplos de números que tengan 105 divisores. ¿Cuál es el entero positivo más pequeño que tiene 105 divisores?

50. `(Parcial 2012-13)` Escribe la lista de los números primos mayores que 260 y menores que 300.

51. `(Junio 2012-13)` He hecho 50 pizzas, y sé que la mitad de los clientes comprarán media pizza, y la otra mitad 1/3 de pizza ¿A cuántos clientes podré atender?

    Sol: Si llamamos X a la cantidad de clientes, se que la mitad $1/2X$ piden la mitad de una pizza, es decir se habrán llevado $1/4X$ de pizza, y el resto $1/6X$ luego como tengo 50 pizzas, se tiene

    $$\frac{1}{4}X + \frac{1}{6}X = 50 \quad \Rightarrow \qquad 5X = 600 \quad \Rightarrow \qquad X = 120 \text{ clientes.}$$

52. `(Parcial 2012-13)` ¿Cuál es el menor número de 3 cifras que es múltiplo de 9 y da resto 6 al dividirlo por 7?

53. `(Parcial 2012-13)` Sabiendo que $-3905 = -45 \times 87 + 10$, encuentra de manera razonada **- sin hacer la división -** el cociente y el resto de dividir -3925 entre 45.

54. `(Enero 2014-15)` He preparado 49 pizzas, y sé que la tercera parte de los clientes comprarán media pizza, y el resto comprará 1/3 de pizza. ¿A cuántos clientes podré atender?

55. `(Enero 2014-15)` Encuentra el mayor número de 3 cifras el cual al dividirlo entre 8 se obtiene de resto 3, y al dividirlo entre 11 se obtiene de resto 1.

56. `(Enero 2013-14)` Si hoy es lunes, y son las 9 de la mañana, ¿qué día de la semana será dentro de 10000 horas?

    Sol: Son 416 días (son varias semanas y 3 días) y 16 horas, es **viernes**.

57. `(Parcial 2014-15)` ¿Cuál es el número más próximo a 990 que es múltiplo de 7 y da resto 4 al dividirlo por 8?

    Sol: 980

58. `(Junio 2013-14)` Calcular los números primos entre 330 y 370.

59. `(Parcial 2015-16)` Cuántos divisores tiene el número 21175. De todos sus divisores, cuántos cumplen la propiedad de que al dividir 21175 por estos, el número resultante tiene exactamente un número impar de divisores.

    Sol: $21175 = 5^2 \times 11^2 \times 7$, luego tiene 18 divisores. De estos, hay 4 cuadrados perfectos: $1,\ 5^2,\ 11^2,\ 55^2$.

60. `(Enero 2015-16)` Encuentra los números primos comprendidos entre el 280 y el 310.

    Sol: 281, 283, 293, 307

61. `(Parcial 2013-14)` ¿Cuál es el número más próximo a 1100 que es múltiplo de 9 y da resto 4 al dividir por 5?

    Sol: Primero buscamos el número más próximo a 1100 múltiplo de 9, que es: 1098, pero no cumple la otra propiedad, y ahora sumamos 9, y le restamos 9 formando una lista corta de la que seleccionamos el más cercano a 1100 que acabe en 4 o 9. Sale 1089.

62. ¿Cuántos divisores tiene el número 7623? ¿Cuáles son múltiplos de 77? Escribe el mayor de entre los que tienen 3 cifras.

63. `(Parcial 2015-16)` Completa los recuadros en la siguiente suma de dos números en base 8.

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 & \square & 2 & 6 & \square & _{(8} \\ + & \square & 2 & \square & 3 & 4 & _{(8} \\ \hline 1 & 3 & 0 & 4 & \square & 1 & _{(8} \end{array}$$

    Sol: $5\mathbf{6}26\mathbf{5}_{(8} + \mathbf{5}2\mathbf{1}34_{(8} = 1304\mathbf{2}1_{(8}$.

64. `(Parcial 2013-14)` Sabiendo que $4201 = 45 \times 93 + 16$, encuentra de manera razonada **- sin hacer la división -** el cociente y el resto de dividir 42011 entre 930.

    Sol: $42011 = 4201 \times 10 + 1$, por eso el cociente se mantiene y dado que $16 \times 10 + 1 = 161$ no supera al nuevo divisor (93×10), éste es el resto. Así, el cociente=45, y el resto=161.

65. (`Parcial 2017-18`) Cuántos divisores tiene el número 155155. De todos sus divisores, escribe los que son múltiplos de 143.

    Solución: Dado que $155155 = 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 31$, el número tiene **32 divisores**, y de estos los que son múltiplos de $143 = 11 \times 13$, son

$$\mathbf{143} * \{\mathbf{1}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{31}, \mathbf{35}, \mathbf{155}, \mathbf{217}, \mathbf{1085}\}.$$

66. `(Junio 2014-15)` Sin realizar la división y sabiendo que $1111111 = 2345 \times 473 + 1926$. Calcula:

    a) el cociente y el resto que resultan al dividir 11111111 entre 4730.

    b) el cociente y el resto que resultan al dividir 112111100 entre 234500.

67. Una aplicación de las congruencias: el ISBN. El ISBN de un libro es un código de 10 dígitos, formados por bloques que corresponden al idioma, el editor, el número asignado al libro por la editorial y, finalmente, un dígito de control, que puede ser un número del 0 al 9 o la letra X (que representa el número 10). El dígito de control se asigna de manera que $\sum_{i=1}^{10} i x_i \overset{\text{mod } 11}{\equiv} 0$.

    a) Los primeros 9 dígitos del ISBN de un libro son 0-07-053965. ¿Cuál es el dígito de control de ese libro?

    b) En el ISBN de un libro se ha borrado un dígito, y vemos el código 0-201-57*89-1. ¿Qué dígito falta?

    Sol: a) El dígito de control es el 0. b) El dígito que falta es el 8.

68. ?Cu?al es el menor número de 8 cifras que es par y que da resto 3 al dividir por 5?

69. `(Parcial 2014-15)` Sabiendo que $39683 = 321 \times 123 + 200$, encuentra razonadamente **- sin hacer la división -**

    a) El cociente y el resto de dividir 396900 entre 3210.
    b) El cociente y el resto de dividir 396900 entre 1230.

    Sol: a) $c = 123$, $r = 2070$; b) $c = 322$, $r = 840$

70. `(Parcial 2014-15)` Un grupo de escolares fueron a una pastelería y compraron 12 palmeras de chocolate. Si se las repartieron por igual y cada amigo comió $2/5$ de palmera, ¿cuántos amigos eran en el grupo?.

    Sol: Si cada uno se toma $2/5$ de una palmera y hay 12 palmeras, entonces dado que sabemos que se comen 2 palmeras entre 5; y doce palmeras son 6 grupos de 2 palmeras, se tiene que hay $6 \times 5 = 30$ amigos.

71. `(Enero 2015-16)` Sabiendo que $174603 = 543 \times 321 + 300$, encuentra razonadamente **- sin hacer la división -** el cociente y el resto que resultan al dividir 1747030 entre 3210.

    Sol: Sabemos que el divisor de la que nos piden es 3210. Tenemos que ver cuál es e divisor que tomaremos en la división inicial, resulta que 3210 es 10 veces 321, por tanto esa es nuestra elección. Tomando esa elección nuestra división inicial está acabada. Por tanto, podemos escribir: $10 \times 174603 = 1746030 = 543 \times 3210 + 3000$, y como el dividendo que me dan son $1747030 - 1746030 = 1000$ unidades más, entonces: $c = 544$, $r = 3000 + 1000 - 3210 = 790$

72. Calcular el menor número natural sabiendo que los cinco números consecutivos a éste sean compuestos.

    Sol: 23

---

73. Encuentra todos los divisores de 990 que sean múltiplos de 6.

    Sol: 6, 18, 30, 66, 90, 198, 330, 990

74. ¿Cuántos divisores tiene el número 3528? ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 21?

    Sol: 3528 tiene 36 divisores, y de ellos 16 son múltiplos de 21

75. Encuentra los números mayores que 100 y menores que 200 que son divisibles por 2, por 3 y por 7 a la vez.

76. `(Junio 2012-13)` Encuentra un número de tres cifras, que empiece por 2, y que tenga 10 divisores.

    Sol: Un número con 10 divisores es de la forma p^9 con p primo, o $p\,q^4$ con p y q primos distintos, en este caso, y probando, vemos que son soluciones posibles:

    $$2^4 \times 13 = \mathbf{2}08 \text{ y } 2^4 \times 17 = \mathbf{2}72.$$

77. `(Enero 2014-15)` Sin realizar la división y sabiendo que

    $$1111111 = 2345 \times 473 + 1926.$$

    a) El cociente y el resto al dividir 11111110 entre 4730.

    b) El cociente y el resto al dividir 11113110 entre 23450.

78. `(Junio 2012-13)` a) Escribe 3 múltiplos de 4 consecutivos. Comprueba que uno de ellos (y solo uno) es múltiplo de 3.

    b) Demuestra que tomando 3 múltiplos de 4 consecutivos cualesquiera, exactamente uno de ellos es múltiplo de 3.

    So: a) El ejemplo podría ser: 4, 8 y 12 donde solo el 12 es múltiplo de 3.

    b) Ahora bien, un múltiplo de 4 cualquiera es de la forma $4n$, el siguiente es $4n + 4$ y el siguiente $4n + 8$. Veamos que uno, y solo uno, es múltiplo de 3.
    Si n es múltiplo de 3, es decir, $n = 0 \pmod 3$, entonces $4n$ es múltiplo de 3 y solo él.
    Si $n = 1 \pmod 3$, entonces $4n + 8$ es múltiplo de 3 y solo él.
    Finalmente si $n = 2 \pmod 3$, entonces $4n + 4$ es múltiplo de 3 y solo él.

79. Sabiendo que $123456789 = 11 \times 11223344 + 5$, calcular el cociente y el resto de dividir 1234567899 entre 110.

    So: $r = 59$, y $c = 11223344$.

80. `(Parcial 2012-13)` Un número se dice que es un cúbico perfecto si es el cubo de un número natural. ¿Cuál es el menor número natural por el que hay que multiplicar 90 para que el resultado sea un cúbico perfecto?

81. `(Parcial 2015-16)` Un ciclista parte de Madrid dirección Pamplona a una velocidad de 24 Km/h, dos horas más tarde otro ciclista parte desde Pamplona dirección Madrid. Si sabemos que la distancia entre las dos ciudades es de 370 Kms, y que el segundo ciclista se encuentra con el primero pasadas 7 horas. A qué velocidad iba el segundo ciclista.

    Sol: Dado que el primero sale dos horas antes que el segundo y va a 24 Km/h. Entonces, cuando sale el segundo están a una distancia de $370-48 = 322$ Kms, dado que se encuentran a las 7 horas, entonces cada hora se acercan 322/7=46 Kms, y dado que el primero va a 24 Km/h, entonces el segundo va a $46 - 24$=22 Km/h.

82. `(Parcial 2012-13)` ¿Cuáles son los divisores comunes múltiplos de 6 de los números 6300 y 2178? ¿Cuántos divisores de 9 comunes tienen?

83. (Parcial 2016-17) Sabiendo que $106605 = 432 \times 246 + 333$, encuentra razonadamente **- sin hacer la división -** el cociente y el resto de dividir 555555 entre 1230.

84. La conjetura de Goldbach dice que todo número par mayor o igual que 4 se puede escribir como suma de dos números primos. Comprueba la conjetura para los números 134, 188 y 200.

    Sol: Los primos para el caso 134 están en la lista: $\{3, 7, 31, 37, 61, 67, 73, 97, 103, 127, 131\}$.
    Para el 188 son: $\{7, 31, 37, 61, 79, 109, 127, 151, 157, 181\}$.
    Y para el 200 son: $\{3, 7, 19, 37, 43, 61, 73, 97, 103, 127, 139, 157, 163, 181, 193, 197\}$

85. Busca dos ejemplos de números que tienen un número par de divisores (positivos), que sean divisibles por 28 y mayores que 300.

86. (Parcial 2014-15) ¿Cuántos de los divisores del número 21175 son múltiplo de 5?

    Sol: $21175 = 5^2 \times 11^2 \times 7$, luego son $(1 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 12$.

87. ($\star\star$) Calcular el número primo más próximo a 240 que al dividirlo entre 11 se obtenga de resto 2.

    Sol: 233

88. Encuentra todos los números primos mayores que 400 y menores que 450.

89. Se dice que un número es *perfecto* si es igual a la suma de sus divisores (excepto el propio número). Por ejemplo, 6 es un número perfecto, ya que sus divisores son 1, 2, 3 y 6, y $1 + 2 + 3 = 6$. Encuentra el menor número perfecto mayor que 6.

    Sol: 28=1+2+4+7+14

90. (Enero 2016-17)

    a) Explica cómo encontrar un número que contenga 120 divisores pares, 60 impares y sea múltiplo de 385.

    b) Del número que has dado anteriormente escribe los divisores que tengan exactamente 40 divisores.

    c) Explica por qué un número par tiene como mínimo la misma cantidad de divisores pares que de divisores impares. No se valorará con un simple ejemplo.

    Sol: Este problema acepta más de una solución.

    a) Dado que tiene que tener 180 divisores y de estos 60 impares, siendo el número múltiplo de $385 = 5 \times 7 \times 11$, entonces el número que voy a considerar es $2^2 \times 11 \times 7^2 \times 5^9$.

    b) De este número hay 4 con 40 divisores que son:

    $$2 \times 7 \times 11 \times 5^4, \quad 2 \times 7 \times 5^9, \quad 2 \times 11 \times 5^9, \quad 7 \times 11 \times 5^9.$$

    c) Dado que un número par tiene siempre una parte impar, pero las potencias de 2 solo tienen un divisor impar (el uno), siempre en un número par hay como mínimo la misma cantidad de divisores pares que de impares.

91. Dos números impares consecutivos que son ambos primos se llaman *primos gemelos*. Encuentra una pareja de primos gemelos mayores que 100.

    Sol:101, 103. Además, 107 y 109 son primos gemelos también.

92. Calcular m.c.d.(3179, 2057).

    Sol: 187.

93. `(Junio 2015-16)` Calcula el m.c.d.(15059, 17797,42439,12617).
    Sol: Por las propiedades del m.c.d. tenemos que

    $$\text{m.c.d.}(15059, 17797, 42439, 12617) = \text{m.c.d.}(\text{m.c.d.}(15059, 17797), \text{m.c.d.}(42439, 12617)).$$

    Y hacemos cada m.c.d. empleando el algoritmo de Euclides:

    $$\text{m.c.d.}(15059, 17797) = \text{m.c.d.}(15059, 2738) \overset{(*)}{=} \text{m.c.d.}(15059, 1369) = 1369,$$

    y

    $$\text{m.c.d.}(42439, 12617) = \text{m.c.d.}(4588, 12617) \overset{(*)}{=} \text{m.c.d.}(1147, 12617) = 1147.$$

    Finalmente

    $$\text{m.c.d.}(1369, 1147) = \text{m.c.d.}(222, 1147) \overset{(*)}{=} \text{m.c.d.}(111, 1147) = \text{m.c.d.}(111, 37) = 37.$$

    (*) Si a es impar y b es par, entonces $b = 2B$, por tanto m.c.d.(a, b)=m.c.d.(a, B).

94. Calcular m.c.d.(61875,2535,19125) empleando el algoritmo de Euclides.

95. `(Enero 2013-14)` Encuentra un número que sea múltiplo de 21 y que tenga 10 divisores.

    Sol: $7 \times 3^4 = 567$, $3 \times 7^4 = 7203$.

96. `(Junio 2013-14)` ($\star\star\star$) Encuentra dos divisores impares del número 8624 cuya diferencia es mayor que 100 y menor que 500.

97. `(Junio 2013-14)` Encuentra el menor número de 3 dígitos que tiene 5 divisores.

98. `(Parcial 2013-14)` Encuentra el menor número natural con exactamente 10 divisores.

    Sol: $48 = 2^4 \times 3$.

99. `(Parcial 2015-16)` Calcula el mayor divisor común de los números 4913, 6137 y 11339.

    Sol: Basta aplicar el Algoritmo de Euclides. La solución es 17.

100. `(Junio 2015-16)` Si tenemos 5678 gambas, y las agrupamos en cajas de 28 unidades, obtenemos 202 cajas y nos sobran 22 gambas. Si ahora tenemos 56780 gambas y las agrupamos en cajas de 2020 unidades, ¿Cuántas cajas necesitamos y cuántas gambas nos sobrarían? Sin realizar la división, describe tu razonamiento para obtener el resultado.

     Sol: Nos hablan de agrupar, es decir, de dividir, el enunciado se traduce en $5678 = 202 \times 28 + 22$, y ahora tenemos 56780 gambas, y hacemos cajas de 2020 unidades, entonces:

     1) La división primera que nos dan está terminada pues el resto es $22 < 28$.

2) El divisor de la segunda división es 10 veces la de la primera así que, con este dato, la primera división queda $56780 = 2020 \times 28 + 220$.

3) Como la diferencia con respecto a lo que nos piden es de 0, esto quiere decir que ya está acabada la división, o sea, $c = 28$ y $r = 220$.

101. `(Parcial 2014-15)` Calcula el m.c.d.(21689,12167,19573), y m.c.m.(21689,12167,19573).

Sol: m.c.d.(21689,12167,19573)=529,
m.c.m.(21689,12167,19573)=$18457339 = 23^3 \times 37 \times 41$

102. Calcula el máximo común divisor de 851, 713 y 989.

103. (`Parcial 2017-18`) Calcula el m.c.m.($1011112_{(3}$, $1021221_{(3}$).

Solución: Primero pasamos los números a la base 10, siendo

$$1011112_{(3} = 2 + 3 + 9 + 27 + 81 + 729 = 851,$$

$$1021221_{(3} = 1 + 6 + 18 + 17 + 162 + 729 = 943.$$

Ahora aplicamos la identidad vista en Teoría

$$\text{m.c.m.}(851, 943) = \frac{851 \times 943}{\text{m.c.d.}(851, 943)}$$

Aplicaremos ahora el algoritmo de Euclides, quedando

$$943 = 851 \times 1 + 92 \quad \Rightarrow \quad \text{m.c.d.}(851, 943) = \text{m.c.d.}(851, 23) = 23.$$

Hemos usado que 92 es $\dot{4}$ y que 23 es primo. Para acabar,

$$\text{m.c.m.}(851, 943) = \frac{851 \times 943}{23} = \mathbf{37} \times \mathbf{943}.$$

104. `(Parcial 2013-14)` Encuentra dos divisores de 3 cifras del número 8568.

Sol: Sado que $8568 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 17$, sus divisores de 3 cifras son: $102, 119, 126, 136, 153, 168, 204, 238, 252, 306, 357, 408, 476, 504, 612, 714, 952$.

105. `(Junio 2014-15)`

   a) ¿Cuántos divisores impares tiene el número 720?
   b) ¿Cuántos divisores de 720 son múltiplos de 12? Escríbelos.
   c) Encuentra el menor número impar múltiplo de 35 que tenga 12 divisores y tres primos distintos en su descomposición. (Justifica la respuesta).

Sol: a) 720 tiene **6 divisores impares**: 1, 3, 5, 9, 15, 45.

b) 720/12=60 que tiene 12 divisores, por tanto hay **12 divisores del 720 múltiplos de 12**. Que son:

$$12 * \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}.$$

c) Un número que tenga 12 divisores con 3 primos en su descomposición debe ser de la forma:

$$p * q * r^2,$$

y como nos dicen que es múltiplo de $35 = 5 * 7$ y es impar, entonces el menor es $3^2 * 5 * 7 = \mathbf{315}$.

106. `(Parcial 2014-15)` Encuentra el menor número natural múltiplo de 9 con exactamente 10 divisores.

Sol: $162 = 2 \times 3^4$.

---

107. `(Enero 2011-12)` Un centro de transmisiones emite tres señales distintas. La del primer tipo, cada 28 segundos, la del segunda tipo, cada 70 segundos, y la del tercer tipo cada 294 segundos. Sabiendo que a las 12:00 coincidieron las tres,

i) ¿cuántas veces coinciden entre las 12:00 y las 20:00?

ii) si empiezo a sintonizar las señales a las 20:00 ¿a qué hora las veré coincidir por primera vez?

Sol: Dichas señales coincidirán cuando cierto múltiplo de cada uno de sus tiempos de parpadeo, es decir, que coincidirán por segunda vez (la primera fué a las 12:00) a los

$$\text{m.c.m.}(28, 70, 294) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 2940'' = 49'.$$

(a) Dado que 8 horas contiene 480 minutos, entonces las señales coincidirán 10 veces (contando la de las 12:00) y 9 sin contarla.
(b) Así trás las 20:00 coincidirán en la onceava vez que coincidan, es decir $49 \times 10 - 480 = 10$ minutos pasadas las 20:00, o sea, a las 20:10.

108. `(Junio 2015-16)` Completa los recuadros en la siguiente resta de dos números en la base 5.

$$\begin{array}{ccccccc} & 3 & \square & 0 & 0 & 1 & 3_{(5} \\ - & \square & 2 & \square & 0 & \square & 4_{(5} \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \square & 1 & \square_{(5} \end{array}$$

Sol: $3\mathbf{3}0013_{(5} - \mathbf{2}2\mathbf{3}0\mathbf{4}4_{(5} = 101\mathbf{4}1\mathbf{4}_{(5}$.

109. `(Junio 2015-16)` Un barco velero se propone dar la vuelta al mundo. Si acabó su recorrido hoy a las 9 de la mañana y estuvo navegando durante 3827 horas. ¿A qué hora y qué día de la semana partió el velero? Describe el razonamiento aplicado.

Sol: 20h de un sábado dado que 3827 horas son 159 días y 11 horas, por tanto llegó a las 20 horas (hay que restar un día más al del valor que tenemos, es decir, 150 días que son 22 semanas y 6 días.

Como hoy es viernes, partío hace 22 sábados.

110. En el contorno de un campo trapezoidal cuyos lados miden 72, 96, 120 y 132 m., respectivamente, se han plantado árboles igualmente espaciados. Calcula el número de árboles plantados, sabiendo que hay uno en cada vértice y que la distancia entre dos consecutivos es la máxima posible.

    Sol: m.c.d.(72, 96, 120, 132) = 12 luego hay 35 árboles

111. `(Enero 2012-13)` Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 713 y 667.

    Sol: Aplicando el **Algoritmo de Euclides** se obtiene que $713 = 667 \times 1 + 46$, $667 = 46 \times 14 + 23$ y dado que 23 es primo y divide a 46, entonces $\text{m.c.d.}(713, 667) = 23$, y $\text{m.c.m.}(713, 667) = 713 \times 667/23 = 20677$. $[713 = 23 \times 31,\ 667 = 23 \times 29.]$

112. ($\star\star$) Dar dos ejemplos de 3 números naturales consecutivos los cuales al agruparlos de 7 en 7 sobran 4. Indicar la forma general de escribir dichos números. Demostrar que la suma de 3 números consecutivos de dicha forma es múltiplo de 3.

    Sol:11, 18, 25. En general $7n + 4$, $7n + 11$, $7n + 18$. Su suma es $21n + 33$ que es múltiplo de 3.

113. `(Parcial 2015-16)` Partiendo del número $CADA_{(14}$ y saltando de tres en tres hacia abajo, escribe los primeros 6 elementos de dicha secuencia.

    Sol: Dado que los dígitos en la base 14 son: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D\}$, entonces la solución es: $CAD7_{(14}$, $CAD4_{(14}$, $CAD1_{(14}$, $CACC_{(14}$, $CAC9_{(14}$, $CAC6_{(14}$.

114. ¿Cuánto mide la mayor baldosa cuadrada que cabe en un número exacto de veces en una sala de 8 m de longitud y 6.4 m de anchura? ¿Y cuántas baldosas se necesitan?

115. (`Parcial 2017-18`) Si sabemos que un velero ha estado navegando 44444 horas, y ha llegado a puerto hoy, lunes, a las 19 horas. A qué hora partió y qué día de la semana era.

    Solución: Dado que $44444 = 24 \times 1851 + 20$, y $1851 = 7 \times 264 + 3$, entonces **el velero partió un jueves a las 23 horas**.

116. Un ciclista sale desde un punto **A**, en dirección a **B**, y un segundo ciclista sale desde **B** en dirección a **A**. Si la velocidad del primero es el doble que la del segundo, ¿en qué punto del recorrido se cruzan?

117. ($\star\star$) Calcular, si existen, números de la forma 97x50y1 que al dividirlos entre 6 dan de resto 5, y son múltiplos de 11.

    Sol: 9735011, 9765041, 9795071

118. `(Enero 2016-17)` Si tu DNI tiene letra anterior, o igual a N, trabaja en la base 11, en otro caso en la base 12. Rellena los huecos en la siguiente operación en la base que tienes. Indica la letra de tu DNI aquí $\boxed{}$.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 7 & \square & 4 & 3 & \square & 6 & (\\
+ & \square & 2 & 5 & \square & 7 & \square & (\\
\hline
1 & 1 & 0 & \square & 3 & 3 & 1 & (
\end{array}
$$

Sol:$794366_{(11} + 425A76_{(11} = 110A331_{(11}$; $7A4376_{(12} + 525B77_{(12} = 110A331_{(12}$.

119. `(Parcial 2015-16)` Expresa como fracción irreducible simplificándola al máximo posible:

$$\frac{1}{3} - 4 + \left(1 - \frac{1-8}{4}\right) \div \left(\frac{3}{4}\left(1 + \frac{3}{7}\right) - 1\right)$$

Sol: $209/6$.

120. `(Junio 2012-13)` Estos son los periódos de rotación alrededor del planeta de tres de los mayores satélites de Saturno: (I) Titán: 372 horas; (II) Rea: 108 horas; (III) Hiperión: 510 horas.

   a) Sabiendo que ahora mismo coinciden sobre la vertical de un punto de Saturno ¿Cuándo volverán a coincidir los tres sobre el mismo punto por primera vez?

   b) Cuando Hiperión y Titán coincidan sobre el mismo punto por primera vez ¿Cuántas vueltas completas habrá dado Rea?

   Sol: (a) Coincidirán los tres a la vez en el m.c.m. de sus tiempos, esto es, en el m.c.m. de 372, 108, y 510, que es igual a 284580 horas, que debemos pasar a son años, meses, días y horas. Teniendo en cuenta que 2012 fue bisiesto, y que 284580 h. son 11857 días y medio; que 11857 son algo más de 32 años que contiene 8 bisiestos, se tiene que:

$$32 \text{ años} = 32 \times 365 + 8 = 11688 \text{ días} \qquad \Rightarrow \qquad 11857 = 11688 + 169,$$

   y estamos en Junio y los vimos coincidir a media noche, y dado que los días de los próximos meses se tiene que 169 equivalen a 5 meses y 16 días, luego los volveremos a ver coincidir el 28 de noviembre de 2045 a medio día.

   (b) Dado que el m.c.m.$(372, 510) = 31620$ horas, y dado que Rea da una vuelta cada 108 horas, entonces habrá dado 292 vueltas.

121. `(Parcial 2012-13)` Calcula el mínimo común múltiplo de 361 y 589.

122. `(Parcial 2013-14)` Calcula el menor número de 4 cifras que es múltiplo común de 40, 35 y 28.

   Sol: Como el m.c.m.$(40, 35, 28)$=m.c.m.$(2^3 \times 5, 5 \times 7, 2^2 \times 7) = 2^3 \times 5 \times 7 = 280$, buscamos el menor múltiplo de 280 que tenga 4 dígitos, dado que $1000 = 280 \times 3 + 160$, entonces la solución es 280×4, que es 1120.

123. `(Enero 2016-17)` Luis y Alicia tienen una tienda desde el 2010, sabemos que en el primer año obtuvieron un beneficio del 4 % de lo invertido, el segundo año obtuvieron un beneficio

de 11 %, al final del tercer año hubo un incendio en la tienda y la reparación de la tienda les supuso un gasto de 7.450 euros y además tuvieron unas perdidas del 2 %. Por ultimo, al final del 2014 han tenido un beneficio del 5 %. Si el beneficio bruto del 2014 asciende a 8600 euros. Se pide:

a) Si pagaron de impuestos el 2014 un 21 %, cúal es el beneficio neto de dicho año.

b) ¿Cuánto dinero invirtieron en dicho negocio? Razona si les va bien, o no.

Sol: Para la primera parte a) basta con calcular la parte que no llevan impuestos de 8600, es decir, el 79 % que resulta 6794 Euros.

La segunda no es compleja, debemos ir calculando lo qie poseían en años previos, siendo lo que tenían en el 2010 un total de 13825'1 Euros y como se asume que la reparación como parte de los beneficios que han tenido que emplear el negocio les va bien pues esa cantidad junto a los 8600 euros es mayor que lo que invirtieron en 2010.

124. `(Junio 2015-16)` Un faro emite 4 señales diferentes: la roja cada 50 seg., la azul cada 18 seg., la amarilla cada 2 minutos 50 seg, y la blanca cada 25 minutos y 30 segundos. Todas ellas coinciden a las 0:01 horas.

(a) ¿Cuántas veces coinciden durante un día completo?

(b) Si llego justo cuando el faro emite simultaneamente, y por séptima vez, las señales azul, amarilla y blanca. ¿A qué hora del día veré la luz roja? Expresa el resultado en horas, minutos y segundos.

Sol: Dado que 2minutos y 50 segundos son 170 segundos, y 25 minutos y 30 segundos son 1530 segundos; y que las lunes coincidirán cuando el tiempo pasado sea un múltiplo común de los tiempos en los que cada señal aparece, entonces tenemos que tener que calcular

$$\text{m.c.m.}(50, 18, 170, 1530) = \text{m.c.m.}(2 \times 5^2, 2 \times 3^2, 2 \times 5 \times 17, 2 \times 3^2 \times 5 \times 17)$$

es decir, $\text{m.c.m.}(50, 18, 170, 1530) = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 17 = 7650$. (a) Dado que un día tiene 24×360 seg.=86400 seg., y que $86400 = 7650 \times 11 + 2250$ entonces coinciden 11 veces en un día.

(b) Dado que las 3 luces coinciden cada

$$\text{m.c.m.}(18, 170, 1530) = 1530,$$

se tiene que la séptima vez que coincidan será a los 10710 seg. y como la roja brilla cada 50 seg. han de pasar 40 segundo, esto es, a los 10750 seg., y dado que 3 horas son 10800 seg. entonces la roja la verá

$$10750'' = 2h\,59'10''$$

despues de que empiecen a parpadear, y como esto sucede a las 0:01, entonces serán las 2:59:11.

125. (`Parcial 2017-18`) Si la letra de tu DNI es anterior, o igual, a M debes trabajar en la base 9, y en otro caso debes trabajar en la base 8. Letra de tu DNI: $\boxed{}$

Completa los recuadros en la siguiente suma de dos números en la base que te toque:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 5 & \square & 2 & 6 & \square & _{(} \\
 & + & \square & 2 & \square & 3 & 4 & _{(} \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 & 4 & \square & 1 & _{(}
\end{array}$$

Solución: $56265_{(8} + 52134_{(8} = 130421_{(8}$

$57266_{(9} + 62134_{(9} = 130411_{(9}$.

126. ($\star\star$) Sabiendo que el 1 de marzo de 1990 fue Jueves. Y sabiendo que los años múltiplos de 100 que no de 400 no son bisiestos (se denominan seculares). ¿qué día de la semana fue el 1 de marzo del año 1000?, ¿qué día de la semana fue el 1 de marzo del año 2990?

Sol: 1000$\rightarrow$ Sábado, 2990 $\rightarrow$ Lunes

127. `(Parcial 2015-16)` Sabiendo que $334143 = 246 \times 1357 + 321$, encuentra razonadamente **- sin hacer la división -** el cociente y el resto de dividir 1670800 entre 1230.

Sol: Sabemos que el divisor de la que nos piden es 1230. Tenemos que ver cuál es e divisor que tomaremos en la división inicial, resulta que 1230 es 5 veces 246, por tanto esa es nuestra elección. Tomando esa elección nuestra división inicial esta inacabada. Así que la acabamos $321 = 1 \times 246 + 75$. Por tanto, el nuevo cociente es 1358, y el resto 75. Ahora, como el divisor que nos piden es 5 veces el original, la división inicial la podemos escribir: $5 \times 334143 = 1670715 = 1230 \times 1358 + 375$, fiíate que $375 = 5 \times 75$, y como el dividendo que me dan es 85 unidades más, entonces: $c = 1358$, $r = 460$

128. `(Parcial 2017-18)` Sabiendo que $797777 = 5115 \times 155 + 4952$, encuentra razonadamente **- sin hacer la división -** el cociente y el resto de dividir 2400000 entre 465.

Solución: Dado que $465 = 155 \times 3$, escribimos la operaión original como si el divisor es 155, luego multiplicamos todo 3, quedando

$$2393331 = 465 \times 5115 + 14856.$$

Como la diferencia entre divisores es de 6669 y el resto que tenemos además es 14856, primero los sumamos y como esta cantidad 21525 es mayor que el divisor debemos agrupar de nuevo,

$$21525 = 465 \times 46 + 135,$$

luego el **cociente** será **5161** y el **resto** será **135**.

---

129. `(Enero 2011-12)` Encuentra todos los números de la forma $974x8y$ que cumplan estas tres condiciones a la vez: (a) tiene resto 4 al dividir por 5; (b) es impar; (c) no es divisible por 3.

Sol: Dado que $974x8y$ en base decimal equivale al número

$$y + 8 \times 10 + x \times 10^2 + 4 \times 10^3 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^5,$$

cuyo resto al dividir por 5 resulta y entonces $y = 4 \pmod 5$ y dado que y es un dígito se tiene que $y = 4$ ó $y = 9$ y como el número es impar entonces $y = 9$. Además el número no es divisible por 3, veamos cuál es el resto al dividir dicho número por 3, dado que el resto resulta ser la suma de los dígitos, entonces

$$974x89 \pmod 3 = 9+7+4+x+8+9 \pmod 3 = 1+x \pmod 3 \neq 0 \pmod 3.$$

Por tanto $x = 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9$, mientras que $y = 9$.

Las soluciones son: 974089, 974189, 97389, 974489, 974689, 974789, 974989.

130. (Enero 2014-15) Encuentra, si es posible, todos los números de la forma $9x50yx2$ que son múltiplos de 198.

131. (Junio 2011-12) ($\star\star$) Demuestra que la suma de 4 múltiplos de 6 consecutivos siempre es múltiplo de 12.

132. (Junio 2014-15) Encuentra tres divisores del número 119119 que tengan tres dígitos y sean múltiplos de 7.

    Sol: $119119 = 7^2 * 11 * 13 * 17$

133. (Junio 2011-12) Describe todos los números de la forma $234x31y01$ que son múltiplos de 3 y de 7.

134. Cierta bebida refrescante lleva 9 medidas de agua azucarada que contiene 4/5 partes de azúcar, 2 partes de miel que contiene 8/9 partes de azúcar, 2 unidades de lima, y 1 parte de tónica que contiene 1/8 parte azúcar. Si elaboramos 1 litro de esta bebida, ¿qué cantidad de azúcar tiene?, ¿qué porcentaje de la bebida no contiene azúcares?

    Sol: Como de azúcares contiene la proporción $\frac{571}{720}$, entonces la proporción sin azúcar es de $\frac{149}{720}$. Por tanto si hacemos 1 litro de bebida, esta tendrá 0,79 l=79 cl.

135. ($\star\star\star$) Calcular, si existen, números capicúa de 5 dígitos que son múltiplos de 5, 6 y 7.

    Sol: No existen

136. (Junio 2012-13) Encuentra tos los números de la forma 87x821y que tienen resto al dividir por 5 y resto 1 al dividir por 6.

    Sol: Dado que tiene resto 3 al dividir por 5, entonces $y = 3$ o $y = 8$. Por otro lado para hacer el cálculo módulo 6 descomponemos el número en potencias de 10, quedando:

$$\begin{aligned} 87x821y &= 8\times 10^6 + 7\times 10^5 + x\times 10^4 + 8\times 10^3 + 2\times 10^2 + 1\times 10 + y \\ &\to 2\times 4 + 4 + x\times 4 + 2\times 4 + 2\times 4 + 4 + y \pmod 6. \end{aligned}$$

Ahora reducimos módulo 6 quedando (a la derecha ponemos lo que nos indica el enunciado)

$$87x821y \equiv 4x + 2 + y \pmod 6 = 1 \pmod 6.$$

Ahora vemos la casuística:

*) Si $y = 3$ entonces $4x + 5 \equiv 1 \pmod 6$ que tiene como soluciones para x: $x = 2$, $x = 5$, $x = 8$.

*) Si $y = 8$ entonces $4x + 10 \equiv 1 \pmod{6}$ que no tiene soluciones para x.

Luego las soluciones son: 8728213, 8758213 y 8788213.

137. `(Enero 2013-14)` Encuentra todos los números de la forma $8340170x97y$ que tienen resto 4 al dividir por 6 y resto 3 al dividir por 5.

Sol: El hecho de que al dividirlo por 6 tenga de resto 4, eso quiere decir que al dividirlo por 2 tiene resto 0, es decir, es par. Y que al dividirlo por 3 da de resto 1. Además al dividirlo por 5 tiene resto 3, es decir que el número acabará en 3 o en 8, y como es par entonces el número ha de acabar en 8, así $y = 8$. Por otro lado al dividirlo por 3 tiene resto 1, y como

$$r(8340170x97y, 3) = r(8 + 3 + 4 + 0 + 1 + 7 + 0 + x + 9 + 7 + 8, 3) = r(2 + x, 3) = 1,$$

entonces tiene que ser $x = 2$, $x = 5$, o $x = 8$.

Números: 83401702978, 83401705978, 83401708978.

138. (`Parcial 2017-18`) Encuentra un número natural de cuatro dígitos que en la base 3 sea capicúa, y solo contenga el dígito 2.

Solución: Hay dos soluciones

$$\mathbf{2222222_{(3}} = \mathbf{2186}, \quad \mathbf{22222222_{(3}} = \mathbf{6560}.$$

139. `(Parcial 2016-17)` Sabiendo que $74481 = 222 \times 333 + 555$, encuentra razonadamente **- sin hacer la división -** el cociente y el resto de dividir 300000 entre 888.

Sol: Sabemos que el divisor de la que nos piden es 888. Tenemos que ver cuál es e divisor que tomaremos en la división inicial, resulta que 888 es 4 veces 222, por tanto esa es nuestra elección. Tomando esa elección nuestra división inicial está inacabada. Así que la acabamos: $555 = 2 \times 222 + 111$. Por tanto, el nuevo cociente es 335, y el resto 111. Ahora, como el divisor que nos piden es 4 veces el original, la división inicial la podemos escribir: $4 \times 74481 = 297924 = 888 \times 335 + 444$, fíjate que $444 = 4 \times 111$. y como el dividendo que me dan tienes 2076 unidades más, tenemos que $300000 = 888 \times 335 + (2076 + 444)$, es decir que está inacabada de nuevo, la acabamos y nos resulta: $\boxed{c = 337,\ r = 744}$.

140. Encuentre todos los números de la forma $921a02b$ que son impares, múltiplos de 3 y al dividirlo por 5 se obtiene resto 3.

141. `(Junio 2015-16)` Encuentra dos números de los que sabemos que:

(i) Tienen 16 divisores impares de un total de 80 divisores.

(ii) En su descomposición de factores primos tienen 3 primos distintos.

(iii) El mayor divisor impar es divisible por 625.

Sol: $625 = 5^4$, y dado que

$$16 = 8 \times 2 = 4 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2.$$

y teniendo en cuenta que tiene que haber una potencia superior, o igual, a 5, entonces los números han de ser de la forma:

$$2^4 \times q^1 \times 5^7,$$

siendo q primo impar distinto de 5. Por ejemplo, dos números de esta forma serían:

$$2^4 \times 3 \times 5^7 = 3750000, \qquad 2^4 \times 7 \times 5^7 = 8750000.$$

142. (Junio 2015-16) Si cada año el valor de un móvil se reduce en un 30 %, ¿cuántos años tienen que pasar para que su valor sea la 1/4 parte de su valor inicial?

    Sol: Cada año que pasa su valor es del 70 %, y como 25 %=0'25, entonces hay que hacer hacer potencias de $0'7$ hasta estár por debajo de 0'25, eso pasa en la 4ta potencia, o sea, que han de pasar 4 años. $0'7^3 = 0'343$, y $0'7^4 = 0'2401$.

143. (Junio 2014-15) Encuentra, si es posible, todos los números de la forma $7x77xy03$ múltiplos de 99.

144. (Enero 2015-16) (⋆⋆) (a) Demuestra que si tomas 5 múltiplos de 7 consecutivos, su suma es es múltiplo de 35.

    (b) Encuentra una secuencia de 5 múltiplos de 7 consecutivos cuya suma sea múltiplo de 70.

    Sol: Cinco múltiplos de 7 consecutivos son de la forma:

    $$7n, \quad 7n+7, \quad 7n+14, \quad 7n+21, \quad 7n+28.$$

    Por tanto su suma es igual a $35n + 70$.

    Así la secuencia que nos piden puede ser $14, 21, 28, 35, 42$.

145. Calcular, si existen, los números de la forma 12y21 que al dividirlos entre 6 dan de resto 5.

    Sol: 12221, 12521, 12821.

146. (Parcial 2015-16) Encuentra un número natural múltiplo de 105 con un número impar de divisores. Describe cómo lo has calculado.

    Sol: Un número múltiplo de 105 es $105 \times A$ con A número natural. Si nos dicen que el número ha de tener un número impar de divisores, entonces, por teoría sabemos que tiene que ser el cuadrado de un número, por eso la solución más simple es $(105)^2 = 11025 = 3^2 \times 5^2 \times 7^2$, pero valdría por ejemplo $17^2 \times 105^2$. Hay infinitas posibilidades.

147. (Enero 2015-16) Encuentra los dígitos x e y sabiendo que el número $n = 1317x19752y$ tiene resto 5 cuando lo dividimos entre 8 y resto 4 cuando lo dividimos entre 9.

    Sol: Dicho número expresado en base 10 es de la forma,

    $$n = y + 2 \times 10 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^3 + 9 \times 10^4 + 10^5 + x \times 10^6 + 7 \times 10^7 + 10^8 + 3 \times 10^9 + 10^{10}.$$

Por tanto al imponer la condición $r(n, 8) = 5$ obtenemos, dado que $r(10^3, 8) = 0$, (la flecha indica el resto al dividir por 8 en este caso)

$$r(n, 8) = r(y + 2 \times 10 + 5 \times 10^2, 8) \to y + 2 \times 2 + 5 \times 4 \to y \to 5$$

Por tanto $y = 5$. Por otro lado imponemos la condición $r(n, 9) = 4$, quedando

$$r(n, 9) \to 1 + 3 + 1 + 7 + x + 1 + 9 + 7 + 5 + 2 + 5 \to 5 + x \to 4$$

por tanto $x = 8$, luego la solución es $x = 8$, $y = 5$, y $n = 13178197525$.

148. ($\star\star$) Calcular el mayor número capicúa de 3 dígitos menor que 500 que al dividirlo entre 19 se obtenga de resto 11.

 Sol: 353

149. (`Enero 2015-16`) ($\star\star$) Un año se dice Santo Jacobeo si el 25 de julio (festividad de Santiago Apóstol) cae en domingo. Calcula que el próximo año Santo Jacobeo que sea bisiesto.

 Pista: El 25 de julio de 2016 es lunes.

 Sol: 2032, ya que cada 4 años pasan $4 \times 265 + 1$ días. Dicha cantidad al dividirla por 7 da de resto 5 por tanto, si este año el 25 de julio es lunes, entonces en 2020 será sábado, el 2024 será jueves, el 2028 será martes, y el 2032 domingo.

150. (`Parcial 2017-18`) En un horno de bollería se han fabricado 2400 magdalenas y 2640 mantecados, que se desean comercializar en bolsas **con el mismo número de unidades** y sin mezclar ambos productos. ¿Cuántas magdalenas o cuántos mantecados se pueden poner en cada bolsa, teniendo en cuenta que el número debe ser superior a 15 e inferior a 30? **Razona la respuesta.**

 Solución: Dado que deben contener la misma cantidad debe ser un divisor común, es decir, del m.c.d. de ambos números, que en este caso es

 $$\text{m.c.d.}(2400, 2640) = 10 \times \text{m.c.d.}(240, 264) = 40 \times \text{m.c.d.}(60, 66) = 240 \times \text{m.c.d.}(10, 11) = 240.$$

 Y dado que $240 = 2^4 \times 3 \times 5$. Y dicho divisor es mayor que 15 y menor que 30; sabiendo que el 240 tiene como divisores

 $$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, \dots\}.$$

 Luego en cada bolsa podemos poner **16, 20, o 24** magdalenas o mantecados en cada bolsa.

151. (`Junio 2015-16`) Este problema se debe hacer **sin utilizar álgebra**.

 Un profesor corrigió la tercera parte de los exámenes el lunes, el martes corrigió 2/5 de los que le faltaban, y el miércoles solo pudo corregir la mitad que el martes. Si el jueves terminó la tarea corrigiendo 56 exámenes.

 ¿Cuántos alumnos hicieron el examen?

 Sol: Si el lunes corrigió 1/3 del total, entonces aún quedan 2/3 del total, por tanto el martes habrá corregido 2/5 de 2/3 = 4/15, y el miércoles 1/2 de 4/5 = 2/5. Luego habrá corregido hasta el miércoles

 $$\frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{11}{15}$$

por tanto lo que queda, son 56, es decir,

$$\frac{4}{15}X = 56 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{15}{4}56 = 210.$$

Es decir, 210 estudiantes realizaron el examen.

152. `(Enero 2013-14)` ($\star$) Demuestra que la suma de 7 números naturales consecutivos es siempre múltiplo de 7.

Sol: Si tomamos un número natural n, los siguientes 6 consecutivos son $n+1, n+2, n+3, ..., n+6$, cuya suma es

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) = 7n + 21.$$

Como ambos, 7 y 21, son múltiplos de 7, dicha suma es múltiplo de 7.

153. `(Enero 2013-14)` Encuentra todos los números de la forma $8642x13y$ que tienen resto 3 al dividir por 6 y resto 3 al dividir por 5.

---

154. `(Parcial 2015-16)` Encuentra un ejemplo de número natural capicúa que tenga 4 dígitos en base 4 y que su expresión en base 10 sea divisible por 35.

Sol: En general un capicúa en base 4 con cuatro dígitos es $xyyx_{(4} = 65x + 20y$ que es múltiplo de 35 solo si $x = 1$, e $y = 2$, es decir, solo hay uno posible: $1221_{(4}$=105=35×3

155. `(Junio 2015-16)` Desarrolla y transforma dicha expresión en una fracción irreducible:

$$4 \times \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{10} + \frac{9}{20}\right) - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{5}\right) \div \frac{2}{7}$$

Sol: $-31/15$.

156. `(Junio 2015-16)` Describe cómo encontrar un número racional periódico mixto entre 1'8788 y 1'8791. Encuentra uno y escríbelo como una fracción irreducible.

Sol: Teniendo en cuenta los números, una posibilidad (hay infinittas) sería

$$X = 1'87\overline{89}, \quad 100X = 187'\overline{89}, \quad 100{\times}100X = 18789'\overline{89} \Rightarrow X = \frac{18789 - 187}{9900} = \frac{18602}{9900} = \frac{9301}{4950}.$$

157. `(Enero 2012-13)` ¿Qué fracción es mayor? **Razona la respuesta.**

$$A = \frac{9765}{9764} \qquad \text{o} \qquad B = \frac{4327}{4326}$$

Sol: Dado que $A = 1 + 1/9764$, y $B = 1 + 1/4326$ la mayor es B.

158. (`Parcial 2017-18`) Expresa como fracción irreducible simplificándola al máximo posible:

$$\frac{2}{5} - \frac{17}{11} - \left(\frac{5-7}{5} - 2\right) \div \left(1 + \frac{1}{4}\left(2 - \frac{8}{5}\right)\right) + 3.$$

Solución: Igual al del otro modelo. **222/55**.

159. `(Parcial 2016-17)` Calcula el m.c.m.(215303, 220409)

Sol: Basta aplicar primero la identidad m.c.m.(a,b)=a×b/m.c.d.(a,b), y para calcular el m.c.d. el algoritmo de Euclides. Siendo $220409 = 215303 + 5106$, así

$$\text{m.c.d.}(215303, 220409) = \text{m.c.d.}(215303, 5106) = \text{m.c.d.}(215303, 2553) = \text{m.c.d.}(215303, 851),$$

y dado que $215303 = 815 \times 253$, entonces la solución es $\boxed{253 \times 220409.}$

160. Si compramos un traje por 80 euros habiéndole aplicado un IVA del 21 %. ¿Cúanto cuesta el vestido sin IVA?

Sol: 101'266 Euros.

161. ($\star\star\star$) Sabiendo que $11111111 = 1234567 \times 9 + 8$, calcular el cociente y el resto de dividir 1111111 entre 9.

Sol: c=123456, r=7

162. (`parcial 2017-18`) Expresa como fracción irreducible simplificándola al máximo posible:

$$\frac{2}{5} + 3 - \left(\frac{3-7}{5} - 2\right) \div \left(1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{5}\right)\right) - \frac{17}{11}.$$

Solución: Operaremos primero los parentesis, y dentro de ellos, primero sumas/restas (de números naturales), y luego multiplicaciones/divisiones. Quedando trás simplificar **22/5**.

163. Calcula de forma exacta $2'3 \div 1'06$, expresando el resultado en forma de fracción irreducible.

164. `(Enero 2012-13)` Expresa el resultado en forma de fracción irreducible.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} - 5 \times \left(\frac{1}{12} - \frac{7}{8}\right) - \frac{7}{12}.$$

Sol: 31/8.

165. `(Junio 2012-13)` ¿Qué número es mayor $A = \dfrac{15764}{15765}$ o $B = \dfrac{878}{879} \times \dfrac{15764}{15765}$? **Razona la respuesta**.

Sol: A, ya que B es la $\dfrac{878}{879} < 1$ parte de A.

166. `(Parcial 2012-13)` Calcula

$$-2 \times (8 - 14) + 1 - 5 \times (-4) - (-7) \times (-4) + 13 \times (-20) =$$

167. (`Parcial 2017-18`) Cuántos divisores tiene el número 155155. De todos sus divisores, escribe los que son múltiplos de 91.

Solución: Dado que $155155 = 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 31$, el número tiene **32 divisores**, y de estos los que son múltiplos de $91 = 7 \times 13$, son

$$91 * \{1, 5, 11, 31, 55, 155, 341, 1705\}.$$

168. Cuatro hermanos y un tio lejano tienen que repartirse una herencia, al hermano mayor le corresponden la $1/3$ parte de ésta, al menor las $2/5$ partes, al tio lejano le corresponden 700 euros, y de lo que queda justo la mitad va a uno de los hermanos y al otro 1001 euros. Sabiendo que hacienda se queda con $1/30$ parte de la herencia. ¿Cúanto dinero le corresponde al hermano mayor?, ¿cúal es la razón entre lo que se lleva el tio lejano y el hermano menor?

Sol: Al mayor le corresponden 3377,5 Euros. La razón es de $\frac{100}{579}$

169. (Parcial 2016-17)Completa los recuadros en la siguiente suma de dos números en base 11.

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 & \square & 2 & 6 & \square & _{(11}\\ + & \square & 2 & \square & 3 & 4 & _{(11}\\ \hline 1 & 3 & 0 & 4 & \square & 1 & _{(11}\end{array}$$

Sol: $5\mathbf{9}26\mathbf{8}_{(11} + \mathbf{8}2\mathbf{2}34_{(11} = 1304\mathbf{A}1_{(11}$.

170. (Parcial 2016-17) Calcula un divisor de del número 111375 que tenga exactamente 6 divisores. De todos sus divisores, escribe los que son múltiplos de 495.

171. (Enero 2013-14) Calcula, en forma de fracción irreducible, el resultado de la siguiente expresión:

$$5 \times \left(1 - \frac{8}{3}\right) + \frac{2}{3} \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6} + \frac{5}{8}\right) =$$

Sol: -677/87.

172. (Enero 2015-16) En cada uno de los siguientes apartados indica cuál es la menor fracción marcándola con un círculo:

(i)

$$\frac{1234}{2469}, \qquad \frac{1233}{2467}, \qquad \frac{1235}{2471}, \qquad \frac{1234}{2467}.$$

(ii)

$$\frac{11223344}{33670031}, \qquad \frac{22334455}{67003364}, \qquad \frac{33445566}{100336697}, \qquad \frac{44556677}{133670032}.$$

(iii)

$$\frac{247}{123}, \qquad \frac{2469}{1234}, \qquad \frac{24691}{12345}, \qquad \frac{2468911}{123456}.$$

Sol: En el primer apartado la 4ta claramente es mayor que la 2da, así que la descartamos y en las demás si las multiplicamos por 2, el numerador es siempre 1 unidad menos que el denominador, así que la menor será la que tenga menor denominador, en este caso

$$\frac{1233}{2467}$$

En el segundo apartado, si multiplicamos el numerador por 3, entonces los numeradores de las tres primeras fracciones son una unidad más que el denominador, por tanto la menor es la que tiene el denominador mayor, es decir la tercera, pero comparándola con la 4ta esta es menor, basta hacer el producto cruzado, es decir, la menor es

$$\frac{44556677}{133670032}.$$

En el último caso, si dividimos por dos las fracciones, obtenemos algo similar que antes, es decir, la menor de las 3 primeras es la 3ra que si la comparamos con la 4ta nos resulta que la menor es

$$\frac{24691}{12345}.$$

173. (`Parcial 2017-18`) Sabiendo que $797555 = 5115 \times 155 + 4730$, encuentra razonadamente **- sin hacer la división -** el cociente y el resto de dividir 2400000 entre 465.

Solución: Análogo al del otro modelo.

174. ($\star\star$) Dar dos ejemplos de 4 números naturales consecutivos los cuales al agruparlos de 5 en 5 sobra 1. Indicar la forma general de escribir dichos números. Demostrar que si tomas 4 números consecutivos de dicha forma hay exactamente uno múltiplo de 4, uno múltiplo de 3, y uno múlplo de 2 (y no de 4).

Sol: 6, 11, 16, 21. En general 5n+1, 5n+6, 5n+11, 5n+16. Los restos de estos números al dividirlos por 2 (en rojo al dividir por 4), 3 y 4 son:

	$5n+1$	$5n+6$	$5n+11$	$5n+16$
4	**0**	1	2	3
	1	2	3	**0**
	2	3	**0**	1
	3	**0**	1	2
3	**0**	2	1	**0**
	1	**0**	2	1
	2	1	**0**	2

Por tanto, en general se cumple lo que decimos pues en cada fila (en general) hay un solo 0 y un 2 (rojo).

175. El precio de una entrada de teatro, con el 20 % de IVA incluido, es de 20 euros. ¿Cuánto IVA estamos pagando por cada entrada?

176. (Junio 2014-15) Expresa como fracción irreducible

$$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\div\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{5}+\frac{11}{21}\right).$$

Sol: 38/11

177. (Parcial 2016-17) Encuentra el número natural más próximo a 1500 que al dividirlo entre 11 el resto sea 7 y sea múltiplo de 12. Describe cómo lo has calculado.

178. (Junio 2015-16) Si sabemos que 4 niños toman 12 unidades de regaliz en 3 horas. ¿En cuánto tiempo se tomarán 3 niños 10 unidades de regaliz?. Describe el proceso de resolución y expresa el resultado en horas y minutos.

Sol: Usaremos proporciones directas, teniendo en cuenta el enunciado, si fijamos las 3 horas, entonces 3 niõs toman 9 unidades de regaliz (en 3 horas).

Si ahora fijamos los 3 niños, teniendo en cuenta lo anterior, tomarán las 10 unidades de regaliz en 30/9 de hora, esto es, $30/9h = (3 + 1/3)$ h= 3 horas y 20 minutos.

179. (Enero 2016-17) Sin realizar la división y sabiendo que $1111111 = 2345 \times 473 + 1926$. Calcula:

a) El cociente y el resto al dividir 11111110 entre 4730.

b) El cociente y el resto al dividir 11113110 entre 23450.

Sol: Hay modelos similares de este problema en otros exámenes. En este caso a) $c = 2349$ y $r = 340$; b) $c = 473$ y $r = 21260$.

180. (Enero 2016-17) Llama X al mayor dígito de tu DNI. Llama Y al siguiente dígito mayor de tu DNI. Encuentra el mayor número de 3 cifras el cual al dividirlo entre X se obtiene de resto 1, y al dividirlo entre 11 se obtiene de resto Y.

Sol: Problemas como este hemos realizado en clase, damos algunas soluciones:

X	Y	N
9	9	955
9	7	964
9	5	973
7	5	995
9	8	910

X	Y	N
6	6	985
8	3	993
8	7	953
8	8	921
7	7	953

181. (Enero 2012-13) En el número decimal periódico $3'\overline{2754789}$, ¿qué número ocupa la posición 865 de la parte decimal? **Razona la respuesta.**

Sol: El periodo tiene longitud 7. Como $865 = 123 \times 7 + 4$, la posición 865 es la misma que la 4, es decir, un 4.

182. (Parcial 2014-15) Expresa como fracción irreducible:

$$\frac{1}{3}-4+\left(1-\frac{1-8}{4}\right)\div\left(\frac{3}{4}(1+0{,}5)\right)$$

Sol: $-11/9$.

183. `(Parcial 2016-17)` Encuentra un número natural impar, que tenga exactamente 60 divisores, sea coprimo con el número 105, y 3 primos distintos en su descomposición en factores primos. Describe cómo lo has calculado.

Sol: Si tiene 60 divisores y 3 primos en su descomposición, dado que por ejemplo $60 = 4 \times 3 \times 5$, una solución arbitraría sería

$$\boxed{p^3 \times q^2 \times r^4}, \quad p,\ q,\ r \text{ primos impares.}$$

Por otro lado, como $105 = 3 \times 5 \times 7$, luego los primos que usemos no pueden ser ni 3, ni 5, ni 7. Así, una solución válida sería $11^3 \times 13^2 \times 17^4$, pero hay muchas más. Otras opciones de descomposición válidas son: $p \times q^2 \times r^9$, $p \times q^4 \times r^5$, y $p \times q \times r^{14}$.

184. `(Enero 2015-16)` Calcula, dando el resultado como fracción irreducible:

$$4 \times \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{10} + \frac{9}{20}\right) - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{5}\right) \div \frac{2}{7}.$$

Sol: $-\dfrac{31}{15}$

185. `(Parcial 2016-17)` Cuántos divisores tiene el número 111375. De todos sus divisores, escribe los que son múltiplos de 165.

Sol: Dado que $111375 = 3^4 \times 5^3 \times 11$, el número tiene $\boxed{\text{40 divisores}}$, y de estos los que son múltiplos de 165, son

$$\boxed{165^*\{1,3,5,9,15,25,27,45,75,135,225,675\}}.$$

El listado interior son los divisores del número $111375/165 = 3^3 \times 5^2$.

---

186. `(Enero 2012-13)` Calcula, de manera exacta, $0'0\overline{4} \div 0'\overline{7}$. Expresa el resultado en forma de fracción irreducible.

Sol: $0'0\overline{4} = \dfrac{2}{45}$, $0'\overline{7} = \dfrac{7}{9}$. Por tanto, $0'0\overline{4} \div 0'\overline{7} = \dfrac{2}{45} \div \dfrac{7}{9} = \dfrac{2}{35}$.

187. `(Parcial 2016-17)` Expresa como fracción irreducible simplificándola al máximo posible:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \left(1 - \frac{1-3}{7}\right) \div \left(\left(1 + \frac{3}{5}\right)\frac{7}{3} - 2\right) \times 7 - \frac{1}{60}.$$

188. `(Enero 2016-17)` Una finca está dividida entre tres hermanos. El primero posee un quinto de la superficie total, y no está cultivada porque la dedica a la caza. El segundo es dueño de tres cuartos del resto, dedica la mitad de su parte al cultivo de cereales y en la otra mitad hay un pinar. El tercero es dueño del resto de la parcela y dedica 2/9 de ellas a cultivar cereales. ¿Qué proporción de la finca está dedicada al cultivo de cereales?

Sol: Dado que el primer hermano tiene 1/5 del total, haciendo un diagrama se ve que el segundo hermano tiene 3/4 de 4/5, es decir 3/5 y de estos, la mitad, es decir 3/10 son cereales. Finalmente el tercer hermano tiene 1/4 de 4/5, es decir 1/5, y de este 2/9 son cereales, o sea, 2/45. Por tanto la proporción de cultivo de cereales es de 3/10+2/45= 31/90.

189. (Enero 2016-17) Qué número es mayor: $A = \dfrac{7402}{7401} \times \dfrac{13924}{13925}$ o $B = \dfrac{742}{741} \times \dfrac{13924}{13925}$.

Sol: La fracción mayor es la B, pues dado que ambas se multiplican por la misma frcción, ambas son mayor que la unidad por una 'porción' así será mayor aquella cuyo denominador sea menor.

190. (Enero 2016-17) ¿Es $\dfrac{156}{650}$ una fracción decimal? En caso afirmativo, exprésala con denominador de la forma potencia de diez.

Sol:Sí es decimal pues la fracción inrreducble de la misma es $6/25$, así como el denominador solo contiene primos divisores del 10, lo es. De hecho, 6/25=24/100.

191. (Junio 2012-13) Expresa en forma de fracción irreducible: $0'0\overline{71} \div 0'\overline{41}$.

Sol: $\dfrac{71}{990} \div \dfrac{41}{99} = \dfrac{71}{410}$.

192. (Enero 2016-17) Una ciudad medieval dispone de provisiones para 10 meses. Justo antes de ser sitiados por un ejército enemigo, la quinta parte de su población huye, y al verse sitiados deciden reducir la ración diaria a 1/4 de la prevista. ¿Cuánto tiempo les durarán las provisiones?

Sol: Las magnitudes que se trabajan aquí son inversamente proporcionales. De hecho, si 1/5 de la población se marcha, si llamamos X a la cantidad mensual de alimento que toman por habitantes, y M_1 a la cantidad de meses que le dura el alimento tras la marcha, entonces

$$Ttotaldealimento = 10X = M_1 \frac{4}{5} X \qquad \Rightarrow \qquad M_1 = \frac{25}{2} = 12'5 \text{ meses.}$$

Ahora bien, como toman 1/4 parte menos de ración por habitante, entonces si llamamos M_2 el tiempo que les dura y R es la ración por habitante y mes, entonces al ser magnitudes de nuevo inversamente proporcionales, se tiene que

$$Ttotaldealimento = 10XR = M_2 \frac{4}{5} X \frac{3}{4} R \qquad \Rightarrow \quad M_2 = \frac{50}{3} = 16'6666 \text{ meses.}$$

O podemos decir 16 meses y 20 días aproximadamente.

193. (Parcial 2016-17) Calcula, si es posible, el valor de b tal que $3216_{(7} = bb_{(9}$.

194. (Parcial 2016-17) Expresa como fracción irreducible simplificándola al máximo posible:

$$\frac{1}{4} - 3 + \left(2 - \frac{3-7}{5}\right) \div \left(\frac{3}{4}\left(1 + \frac{3}{5}\right) - 1\right) - \frac{11}{12}.$$

Sol: Operaremos primero los parentesis, y dentro de ellos, primero sumas/restas (de números naturales), y luego multiplicaciones/divisiones. Quedando trás simplificar $\boxed{31/3}$.

195. (Enero 2016-17) Encuentra, si existen, los dǵitos x e y sabiendo que el número

$$n = 235x71113x17y19y$$

tiene resto 5 cuando lo dividimos entre 12 y es múliplo de 9.

Sol: Si el número tiene que ser múltiplo de 9, entonces lo es de 3 también, pero si al dividirlo entre 12 se tiene de resto 5, entonces, el resto al dividirlo por 3 sería 2 (No es posible pues debe ser 0 ya que es múltiplo de 3). De todos modos, las ecuaciones que resultan son:

$$5y + 8x + 2 \to 5\ (\mathbf{12}), \qquad 2x + 2y + 5 \to 0\ (\mathbf{9}).$$

Las soluciones de la ecuación primera son:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	3	–	7	3	–	7	3	–	7	3

Y ninguna cumple la otra ecución.

196. `(Junio 2013-14)` Calcula, en forma de fracción irreducible, el resultado de la siguiente expresión:

$$\frac{1 + 0'3\overline{2}}{0'7} + \frac{2 - 1'\overline{10}}{1 + 0'1\overline{7}} =$$

197. `(Junio 2013-14)` ¿ Qué es mayor, el 38 % del 20 % de 3/4 o el 57 % del 10 % de la unidad?

198. `(Parcial 2016-17)` Expresa en base 10 el mayor número que se puede escribir con 6 dígitos en base 3.

199. `(Junio 2014-15)` Encuentra un número con 5 cifras decimales que esté entre $1'33\overline{34}$ y $1'33\overline{4}$.

     Sol: $1'33344$–$1'33443$

200. `(Parcial 2015-16)` Escribir los números primos entre el 320 y el 360.

     Sol: 331, 337, 347, 349, 353, 359

201. `(Parcial 2016-17)` Calcula qué dígito ocupa la posición decimal 625 en el número decimal $4'\overline{5435241}$.

202. `(Enero 2015-16)` Encuentra un número con cinco cifras decimales que esté entre $1,\overline{787}$ y $1,\overline{78}$.

     Sol: vale cualquier número raciona con cinco decimales entre $1,78779$ y $1,78786$.

---

203. `(Enero 2011-12)` Este problema debe resolverse **sin utilizar álgebra**.

     En un concierto durante la primera hora se cubrió el 20 % del aforo, durante la segunda hora entraron 500 personas, y en la última hora se cubrió la mitad del resto de aforo. Si quedaron libres 400 plazas, ¿cuál era el aforo del concierto?

     Si por cada 2 chicas que asistían había 3 chicos, y el concierto le gustó a 6 de cada 10 chicas y al 45 % de los chicos, ¿a qué porcentaje de asistentes le gustó el concierto?

     Sol: Dado que tras la primera se cubrió el 20 % del aforo, quedó por cubrir el 80 %, y dado que en la segunda hora entraron 500, luego 400 y quedaron libres 400, entonces

$$80\,\%\ \text{aforo} = 500 + 400 + 400 = 1300$$

     por tanto, el aforo era de 1625 personas.

Dado que de por cada dos chicas asistían 3 chicos el porcentaje de asistentes fue de $2/5 \times 100 = 40\,\%$ de chicas y de $3/5 \times 100 = 60\,\%$ de chicos, y dado que al $6/10 \times 100 = 60\,\%$ de ellas les gustó y al $45\,\%$ de ellos les gustó en total les gustó el concierto al

$$(40 \times 60 + 60 \times 45)/100 = 51\,\%.$$

Otra forma de realizar esta parte es calcular la cantidad de personas que fue al concierto (1225 pers.), calcular la cantidad de chicas (490) y de chicos (735), luego calcular a los que les gustó (294, 330.75) y por último sumar los porcentajes (24 %+27 %).

204. `(Junio 2015-16)` Para un gran evento necesitamos preparar, entre otras cosas, el doble de tartaletas de crema que de chocolate. Las tartaletas de crema llevan 2 uds. de mantequilla, 5 uds. de crema, 8 uds. de bizcocho y 4 uds. de azúcar; mientras que las tartaletas de chocolate requieren de 3 uds. de mantequilla, 2 uds. de crema, 4 uds. de chocolate, y 9 uds. de bizcocho.

Si la mantequilla contiene un 70 % de grasa, la crema un 50 %, y el chocolate un 60 %; y que en total se prepararon 42 tartaletas. Calcula:

(a) El porcentaje de grasa que contienen dichos dulces.

(b) Si una unidad se corresponde a unos 12 gramos, ¿cuántos gramos de crema hemos necesitado?

Sol: Por un lado tenemos

Tart. de crema

Ingred.	uds.	% crema
Mant.	2	70
Crem.	5	50
Bizc.	8	0
Azúc.	4	0
TOTAL	19	

Tart. de chocolate

Ingred.	uds.	% crema
Mant.	3	70
Crem.	2	50
Choc.	4	60
Bizc.	9	0
TOTAL	18	

(a) Por otro nos dicen que hay el doble de crema doble de chocolate, por tanto de cada 3, hay 1 de chocolate y 2 de crema, por tanto el porcentaje de crema de las tartaletas será:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{19}70\,\% + \frac{5}{19}50\,\%\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{18}70\,\% + \frac{2}{18}50\,\% + \frac{4}{18}60\,\%\right) \approx 23'87\,\%.$$

(b) Por las proporciones de las tartaletas, sabemos que hay 14 de chocolate y 28 de crema, dado que en las de chocolate tienen 2 uds. de crema, y en las de crema tienen 5 uds., y cada ud. pesa 12 gramos, el peso total de la crema será de

$$12 \times (14 \times 2 + 28 \times 5) = 2016\,\text{gr}.$$

205. `(Junio 2015-16)` Encuentra un número de tres dígitos que al dividirlo por 13 de de resto 7 y sea múltiplo de 7. Describe cómo lo has calculado.

Sol: El menor número de 3 dígitos es 100, al dividirlo por 13 el resto es 9, por tanto si buscamos un número que de de resto 7, entonces dicho número debe ser (+4+7) [el +4 es para que hagamos un grupo de 13, y +7 para que sobren 7], es decir que cómo mínimo dicho valor sería 111. Dado que necesitamos que además queremos un número que sea múltiplo de 7, entonces si tomamos entre el conjunto

$$\{111, \quad 111+13, \quad 111+26, \quad 111+39, \dots, \quad 111+6\times 13\},$$

uno de ellos es múltiplo de 7, y este es $111+6\times 13 = 189$. Usando una idea similar el mayor es 917. Y entre cada solución par de soluciones consecutivas hay 77 unidades.

206. `(Parcial 2016-17)` Unos amigos fueron a tomar pizza, sabemos que por cada uno que tomó 1/3 de pizza, el triple tomó el 1/5 de pizza, y que se tomaron 14 pizzas. Cuántos amigos fueron a comer. **Razona la respuesta.**

    Sol: Se trata de una división cuotativa pues la cantidad de pizza que toma cada grupo de personas es fija. Si por cada uno que toma 1/3 pizza, 3 toman 1/5 de pizza, entonces (trabajaremos con multiplos de 15 pues m.c.m.(3,5)=15), 15 amigos que toman 1/3 habrán tomado 5 pizzas, y (el triple) 45 amigos habrán tomado 9 pizzas. Es decir, entre $\boxed{\text{60 amigos}}$ se habrán tomado 14 pizzas, que es justo la cantidad de pizzas que me da el enunciado.

207. `(Parcial 2016-17)` Encuentra un número que contenga exclusivamente el dígito 3 y que sea divisible por 7. Razona la respuesta.

208. En una clase, 3 de cada 8 alumnos son chicos. De los chicos, por cada 3 que llevan lentillas 2 llevan gafas, y por cada 10 personas que llevan gafas o lentillas, 3 no lleva gafas. Si hay 20 chicos que llevan lentillas, ¿cuántas chicas hay en la clase?

    Sol: 73 chicas.

209. Escribe los divisores comúnes de los números 6370 y 2457.

210. `(Enero 2015-16)` Para realizar una pintura un artista emplea una unidad de rojo, 2 unidades de naranja, que contienen un 40 % de rojo, y 6 unidades de azul. ¿Cuál es el porcentaje de rojo empleado en la pintura?

    Sol: Dado que se han empleado 9 unidades de pintura, y de estas una es 100 % rojo, dos tienen un 40 % de rojo, y el resto no contienen rojo, el porcentaje será del $\frac{1}{9}100\,\% + \frac{2}{9}40\,\% = 20\,\%$

211. `(Enero 2016-17)` Explica si puede encontrarse un número de 6 cifras decimales entre los números $2'\overline{3453}$ y $2'\overline{345334}$. Si puedes, encuentra un número con siete ciras decimales entre dichos números.

    Sol: Al escribir el desarrollo de ambos números vemos que las primeras cifras decimales son identicas, así no existe un número de 6 cifras decimales entre ellos. Pero si de 7 cifras, las dos opciones son 2'3453344 y 2'3453345.

212. `(Enero 2011-12)` Un funcionario ingresó durante el año 2011 un total de 28550 euros. Si el año 2008 le subieron el sueldo un 3 %, el año 2009 se lo subieron un 2 %, y el año 2010 se lo bajaron un 5 %, ¿cuál era su sueldo antes de la primera de las subidas?

213. `(Junio 2015-16)`Encuentra todos los números de la forma $1122233335xx0yy21$ sabiendo que al dividirlos por 18 se obtiene de resto 3, y cuando lo dividimos por 16 se obtiene de resto 5.

Sol: Si un número da de resto 3 al dividirlo por 18, entonces el número es impar (el nuestro lo es), y el resto al dividir el número por 9 debe ser 3 (primera condición), además nos dicen que el número al dividirlo por 16 nos da de resto 5, entonces el número

$$r(yy21, 16) = 5,$$

(condición segunda) ya que $r(100000, 16) = 0$. Por tanto la condición primera resulta (la flecha ahora significa resto al dividir por 9):

$$1+1+2+2+2+3+3+3+3+5+x+x+0+y+y+2+1 \to 3$$

es decir, simplificando, queda

$$1+2x+2y \to 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x+2y \to 2$$

La segunda condición queda más sencilla: (ahora la flecha representa el resto al dividir por 16)

$$yy21 = 1100 \times y + 20 + 1 \to 12y + 5 \to 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 12y \to 0.$$

Y en este caso es sencillo comprobar que y ha de ser múltiplo de 4, o sea, $y = 0$, $y = 4$ e $y = 8$. Veámos el valor de x en cada caso:

• Si $y = 0$, entonces la primera condición queda: $2x \to 2$, por tanto $x = 1$ (el próximo valor posible sería 1+9=10, que no puede ser).
• Si $y = 4$, entonces queda $2x \to -6 \to 3$, por tanto $x = 6$.
• Si $y = 8$, entonces queda $2x \to -14 \to 4$, por tanto $x = 2$.

Con esto las soluciones son 112223333**5**1**1**0**0**21, 1122233335**66**0**44**21, 1122233335**22**0**88**21.

214. (Junio 2011-12) Este problema se debe hacer **sin utilizar álgebra**.

Un profesor corrigió las dos quintas partes de los exámenes el lunes, el martes no corrigió 1/6 de los que le faltaban, y el miércoles sólo pudo corregir la mitad que el lunes. Si el jueves terminó la tarea corrigiendo 99 exámenes, ¿cuántos alumnos hicieron el examen?

215. (Junio 2011-12) En una fiesta los organizadores vieron que se formaron dos grandes grupos de jóvenes, donde en el primero por cada 4 chicos con gafas había 2 sin gafas, mientras que en el otro grupo había por cada 7 personas 5 tenían gafas. Si el 40 % de los jóvenes fueron al primer grupo y el resto al otro grupo, ¿cuál es el porcentaje total de jóvenes sin gafas?

216. (Enero 2015-16) En una conferencia se dividen a los asistentes en dos salas, **A** y **B**, donde el porcentaje de mujeres es del 75 %. Además, sabemos que por cada 3 hombres que hay en la sala **A**, hay 5 en la sala **B**; y en el sala **B** por cada 3 mujeres hay 1 hombre.

(a) Si en la sala A hay 10 hombres, ¿cuántas mujeres hay en la sala **A**?

(b) Si en total se inscribieron 224 personas. Calcula el porcentaje de mujeres que hay en la sala **B** respecto al total de mujeres.

Sol: (a) Dado que el 75 % son mujeres, entonces dado que en la sala **B**, hay el triple de mujeres que hombres, entonces como en **A** hay 10 hombres, debe haber el triple de mujeres, es decir, 30 mujeres.

(b) Si hay 224 personas, entonces hay 168 mujeres, y 56 hombres, conociendo la relación de hombres entre **A** y **B**, entonces hay 21 hombres en **A**, y 35 en la sala **B**, luego en **B**hay 105 mujeres y con esto el porcentaje que nos piden es 105*100/168 %= 62,5 %.

217. `(Junio 2011-12)` Luis ingresó en el año 2011 un total de 28550 euros. Si en el año 2008 le subieron el sueldo un 4 %, en el año 2009 se lo subieron un 3 %, y en el año 2010 se lo bajaron un 7 % ¿ Cuál era el sueldo antes de la primera de las subidas?

218. `(Enero 2012-13)` Un camión llena un depósito de agua en 2 horas. Otro camión, más pequeño, tarda 3 horas en llenar el depósito. Si pudiéramos poner a los dos camiones a la vez a llenar el dépósito, ¿cuánto tardarían? (Debes dar la solución en horas, minutos y segundos).

    Sol: Dado que el coche grande llena la 1/2 del depósito en una hora, y el pequeñho la 1/3 parte, entre los dos llenan juntos $1/2 + 1/3 = 5/6$ del depósito en una hora, por tanto llenarán el deposito en 6/5 h, es decir, 1h 12 minutos.

219. `(Junio 2012-13)` He comprado un abrigo que estaba rebajado al 40 %, y he pagado por él 72 euros ¿cuál era su precio antes de la rebaja?

    Sol: Si X es el precio del abrigo antes de la rebaja, dado que le han aplicado un 40 % de rebaja, he pagado el 60 % de su precio, es decir

$$\frac{60}{100}X = 72 \quad \Rightarrow \quad X = 120 \text{ euros.}$$

220. `(Enero 2014-15)` En una competición de cortar troncos se presentan tres equipos. Si el primer equipo taló los troncos en 3 horas, el segundo en 5 horas, y el tercero en 7 horas. Calcula el tiempo que necesitar?an los tres equipos juntos para talarlos. Expresa el resultado en horas, minutos y segundos.

221. `(Enero 2014-15)` Sabiendo que dos magnitudes son inversamente proporcionales, si una de ellas la triplico, cómo cambia la otra.

222. `(Junio 2013-14)` He comprado un traje que estaba rebajado un 25 % pero cuando fui a ponérmelo he visto que no me quedaba bien y al cambiarlo ya estaba un 40 % más caro. Si he pagado pagado por él 200 euros, ¿Cuánto costaba el traje en las rebajas?

223. `(Junio 2014-15)` Si por un traje que vale 180 euros pagué 225 euros. Calcula cuál fue el procentaje que se aplicó en dicha compra, y exprésalo como una fracción irreducible.

    Sol: $25\,\% = 1/4$

224. `(Junio 2012-13)` Tres hermanos son dueños de una finca. El primero posee un tercio de la superficie total, y no hay árboles porque la dedica a la caza. El segundo es dueño de 2/5 del resto, dedica la mitad de su propiedad al cultivo de cereales y en la otra mitad hay un pinar. El tercero dedica 2/3 de su propiedad al cultivo de cereales, y el resto es un pinar.

    a) ¿qué proporción del total de la finca es un pinar?

    b) Si hay un total de 30 hectáreas dedicadas al cultivo de cereales ¿cuál es la superficie total de la finca?

Sol: a) El primero posee 1/3 luego entre los otros poseen el resto, es decir, 2/3, si el segundo posee 2/5 partes de ésta, es decir, posee $2/5 \times 2/3 = 4/15$ partes, el tercero entonces posee $3/5 \times 2/3 = 2/5$. Una vez que esto está claro, la proporción del pinar será:

$$\underbrace{\frac{1}{3} \times 0}_{1ro} + \underbrace{\frac{4}{15} \times \frac{1}{2}}_{2do} + \underbrace{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}}_{3ro} = \frac{4}{15}.$$

b) Dado que 4/15 partes son un pinar entonces parte del resto, es decir, de las 11/15 partes restantes quitamos 1/3 del 1er dueño que lo dedica a la caza quedando 2/5 se dedican a cereales, como en este caso son 30 ha. las que se dedican a los cereales, entonces

$$\frac{2}{5}X = 30 \quad \Rightarrow \quad X = 75 \text{ ha.}$$

225. `(Parcial 2016-17)` Expresa en la base 9 el número $CA73_{(13}$ indicando el número intermedio en base 10 necesario para completar el cálculo.

    Sol: Empleamos el desarrollo de dicho número en base visto en teoría

    $$CA73_{(13} = 3 + 7 \times 13 + 10 \times 13^2 + 12 \times 13^3 = 94 + 13^2 157 = \boxed{28148}.$$

    Ahora, para expresarlo en la base 9, dividimos por 9 de forma recurrente de la forma vista en clase obteniendo: $\boxed{42545_{(9}}$.

226. `(Enero 2016-17)` Luis, Maria y Alex juegan llenar un deposito con botellas de agua. Si el equipo de Luis y Maria lo llenan en 82 minutos; el equipo de Maria y Alex lo llenan en 67 minutos, y el equipo de Luis y Alex lo llenan en 71 minutos. Cuánto tiempo tardan en llenarlo los tres a la vez.

    Sol: No se puede deducir nada con los datos que se dan, pero al ser más personas deben tardar menos que el menor tiempo dado, es decir, menos de 67 minutos pues a más personas deben tardar menos por ser una proporción inversa.

227. `(Parcial 2013-14)` Dos ciclistas están en dos pueblos distintos a una distancia de 112 km. Empiezan a pedalear a la vez para encontrarse. Uno va a 18 km/h, y el otro a 22 km/h. ¿Cuánto tiempo tardan en encontrarse? (Debes resolver el problema sin usar álgebra, y dar el resultado en horas, minutos y segundos).

    Sol: Dado que se aproximan al ritmo de $18 + 22 = 40$ Km. por hora, y están separados en principio por 112 Km se tiene que tardan en encontrarse $112/40h = 14/5h = 2^\circ\, 48'$.

228. `(Enero 2013-14)` ($\star\star$) A temperatura constante, la presión y el volumen de un gas son magnitudes inversamente proporcionales. Si la presión de un gas aumenta un 50 %, ¿en qué porcentaje cambia el volumen?

    Sol: Disminuye un $33'\overline{3}\,\%$.

229. `(Enero 2015-16)` Sé que a cierta velocidad puedo viajar durante 13 horas con la gasolina que tengo en el depósito de mi moto. ¿Cuánto debo aumentar la velocidad de forma que pueda viajar durante 9 horas? Expresa el resultado como un porcentaje usando como máximo dos decimales.

Sol: Dado que las magnitudes son inversamente proporcionales, entonces si llamamos a la velocidad asociada a las 13 horas, V, y a la de las 9 horas V' entonces,

$$13V = 9V' = Cte \quad \Rightarrow \quad V' = \frac{1}{3}9V = V + \frac{4}{9}V,$$

así debe ir

$$\frac{4}{9} = \frac{400}{9}\,\% = 44,44\,\%$$

más rápido.

230. `(Enero 2013-14)` He comprado un traje que estaba rebajado un 25 % y he pagado por él 150 euros. ¿Cuál era su precio antes de las rebajas?

 Sol: 200 euros

231. `(Junio 2014-15)` Tres hermanos se reparten una herencia. Si al primero le corresponde la 1/4 parte de la misma, al segundo 1/6 parte y de lo que queda al tercero les corresponden las 3/4 partes y el resto: 280 euros, se dan a obras de beneficencia.

 a) A cuánto dinero asciende la herencia.

 b) Cuál es la razón entre la proporción ganada por el que más recibe respecto al que menos.

 Sol: a) Dado que el H1 tiene 1/4 parte de la erencia, y el $H2$ tiene 1/6 parte, entonces entre los dos tienen un 5/12 de la herencia, y así el H3 tiene 3/4 de 7/12 de la herencia, y como sabemos que el resto, es decir, 1/4 de 7/12 son 280 euros para beneficencia, entonces la herencia asciende a **1920 euros**.

 b) Como el que recibe más es H3 al cual le corresponden 7/16 de la herencia, y el que menos recibe 1/6 parte, entonces dicha **razón** es:

$$\frac{7/16}{1/6} = \frac{21}{8}.$$

232. En un grupo, 4 de cada 10 alumnos son chicos. De los chicos, 3 de cada 10 llevan gafas. Si hay 36 chicos que llevan gafas, ¿cuántas chicas hay en la clase?

 Sol: Hay 180 chicas

233. `(Enero 2013-14)` Una fábrica textil ha hecho 1600 abrigos en 20 días, con una jornada de 8 horas diarias. ¿Cuánto debe aumentar su plantilla si les llega un pedido de 2400 abrigos que tienen que entregar en 15 días, y la jornada máxima es de 10 horas al día?

234. `(Junio 2013-14)` ($\star\star\star$) Si aumentamos en un 30 % el perímetro de un cuadrado, ¿En qué porcentaje aumenta su área?

235. `(Junio 2013-14)` ($\star$) Si un grupo de amigos salen de senderismo y llevan agua para 8 horas y a mitad del camino la cuarta parte de ellos deja el grupo, ¿cuántas horas les durará el agua restante?

236. `(Junio 2013-14)` Dos ciclistas salen simultáneamente de Madrid y de Barcelona yendo el primero a doble velocidad que el segundo y si quedan en una ciudad intermedia a la cual llegan simultáneamente. ¿Que fracción del recorrido habrá recorrido el que iba más rápido?

237. `(Enero 2015-16)` Si un traje me costó en las rebajas 340 euros, y se le había aplicado un descuento del 20 %. ¿Cuánto me hubiese costado el traje si lo hubiese comprado antes de las rebajas?

Sol: 425 Euros

238. `(Enero 2013-14)` Sabemos que en un zoológico los mamíferos son 3/5 del total de animales, las aves representan el 1/6 del total, y el resto son reptiles.

   a) Si hay 60 reptiles, ¿cuántos animales hay en total?

   b) Si el número de animales ha disminuido el 5 % en cada uno de los tres últimos años, ¿cuántos animales había hace 3 años? (Si no has sabido resolver el apartado a), supón que hay 120 animales).

239. `(Enero 2013-14)` Marta trabaja para la hacienda publica, si en el año 2014 ganó 25868 euros, y en los últimos 2 años su salario se le ha ido reducido un 4 % anualmente, y al comienzo de año 2012 se le subió el sueldo un 6 %. Cuál era su salario en el 2011.

240. En una hora, un camión llena 5/17 de un depósito de gasoil. ¿Cuánto tardará en llenar el depósito completo? (Debes dar la solución de forma exacta, en horas, minutos y segundos).

Sol: 3h 24'

---

241. `(Enero 2013-14)` Calcula el valor de n sabiendo que $2^5 \times 4^n = 8^7$.

Sol: $n = 8$.

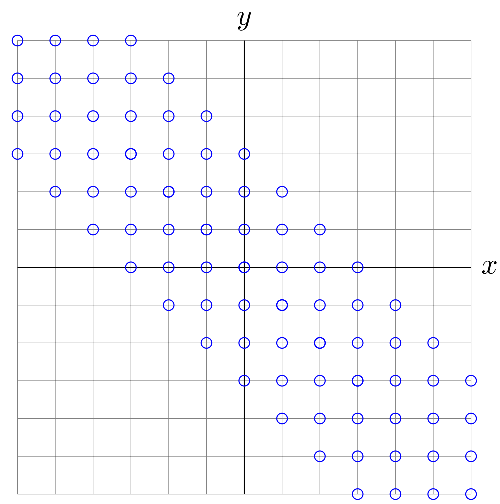
242. `(Junio 2013-14)` Tenemos dos garrafas de 5 y 3 litros de capacidad respectivamente. Si queremos obtener exactamente 4 litros en la garrafa grande, ¿cómo debemos proceder para obtenerlos?

243. `(Junio 2013-14)` Simplificar:

$$\frac{1}{6}\frac{4^3\sqrt{3}}{\left(\frac{2}{9}\right)^2 2^{\frac{1}{3}}} =$$

244. En el plano coordenado, dibuja los puntos (x, y) de coordenadas enteras para los que se verifica que $|x + y| \leq 3$.

Sol: Una parte de la solución es la representada aquí:



245. `(Junio 2014-15)` Resuelve la ecuación: $25 \times 125^{2n} = \dfrac{625^n}{5^{-4}}$.

   Sol: $n = 1$

246. En este problema vamos a comprobar que se puede construir un conjunto de enteros consecutivos, tan grande como queramos, y que no contenga ningún número primo. Utilizaremos lo que se conoce como *factorial de n*, denotado $n!$, y que se define como

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times 3 \times 2 \times 1.$$

   Por ejemplo, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

   Demuestra que los números $n! + 2$, $n! + 3$, …, $n! + n$ son todos compuestos.

   Escribe explícitamente una lista de 10 números consecutivos compuestos.

247. Encuentra la expresión decimal en base 12 de la fracción $\frac{59}{144}$. Encuentra la fracción más pequeña que tiene de denominador 20 y que tiene expresión decimal finita cuando se escribe en base 12.

   Sol: $5/20$.

248. `(Enero 2016-17)` Diremos que un número es horario si proviene de la hora digital, por ejemplo,

$$1 : 30 : 21 \to 13021$$

   Está claro que no todos los números menores que 235959 son horarios, por ejemplo, 136203, no es horario.

   Da una explicación razonable para poder localizar el mayor número horario que es primo. Sabiendo que dicho número es 235951. Estima hasta qué número primo debemos comprobar para garantizar que dicho número es primo.

   Sol: En este caso debemos tomar todos los números entre el 1 y el 235959, y aplicar la criba de Eratostenes, tenemos que incluir también los que no son horarios para poder determinar todos los primos que hay entre estos dos números. Evidentemente este proceso es largo pero tiene fin. Para ver hasta que primo operar para comprobar que 235951 es primo basta con dividirlo hasta el primo mas cercano a la raíz cuadrada de este que es aproximadamente 485. Como desconocemos qué primo es este lo que si podemos decir es que es como máximo 479.