UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

# $q$-POLINOMIOS ORTOGONALES MÚLTIPLES, APROXIMACIÓN DE HERMITE-PADÉ Y TEORÍA DE NÚMEROS

**Autor:** Roberto Santiago Costas Santos

Ldo. en C.C. Matemáticas

Memoria presentada para optar al Diploma de Estudios Avanzados bajo la dirección de Dr. Jorge Arvesú Carballo Enero 2005.

# Índice

# 1. Introducción

Durante los últimos 100 años las matemáticas se han diversificado y especializado tanto que parece casi inconcebible que dos ramas de las matemáticas tan dispares como el análisis matemático y el álgebra puedan confluir a la hora de resolver ciertos problemas, sin embargo con este trabajo se pretende hacer notar que, efectivamente, usándolas adecuadamente nos podemos servir de ambas ramas para resolver problemas tales como la irracionalidad de ciertos números reales. Para ello emplearemos la teoría de aproximación de Padé, más específicamente utilizaremos la teoría de aproximación de Hermite-Padé, la cual nos permitirá aproximar simultáneamente varias funciones en torno a un punto $t = t_0$; de hecho, distinguiremos dos tipos: las aproximaciones de tipo I y tipo II.

Más concretamente, utilizaremos la *Aproximación diagonal* que consiste en tomar tanto el polinomio numerador como el denominador de la aproximación del mismo grado. Aquí, los polinomios ortogonales son los denominadores de las funciones racionales de los aproximantes, de ahí que les dediquemos todo un capítulo a estudiarlos.

Más concretamente, en el capítulo 2 daremos la noción general de $q$-polinomio ortogonal clásico enfatizando algunas de sus propiedades, entre ellas, la llamada *fórmula de Rodrigues*, que junto a la ecuación en diferencias de segundo orden de tipo hipergeométrico

$$\begin{gathered}\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x(s-\frac{1}{2})}\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}+\tau(s)\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)}+\lambda y(s)=0,\\ \Delta f(s)=f(s+1)-f(s),\quad \nabla f(s)=f(s)-f(s-1).\end{gathered} \tag{1}$$

nos permite elaborar toda la teoría de los $q$-polinomios deduciendo otras caracterizaciones. Es sencillo comprobar que las soluciones polinómicas, $\{P_n(s)_q\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, de la ecuación (1) verifican condiciones de ortogonalidad del tipo

$$\sum_{s=a}^{b-1} P_n(s)_q P_m(s)_q \rho(s)\Delta x(s-\tfrac{1}{2}) = \delta_{n,m} d_n^2,$$

donde $d_n$ denota la *norma* de dichos polinomios respecto a la función $\rho(s)$. Esta función, denominada *función peso*, satisface la ecuación de tipo Pearson

$$\frac{\Delta(\sigma(s)\rho(s))}{\Delta x(s-\frac{1}{2})} = \tau(s)\rho(s),$$

siendo $[a, b-1]$ el *intervalo de ortogonalidad*.

Si ahora consideramos las funciones ortonormales asociadas a dichas soluciones polinómicas $\{\Phi_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, un cálculo directo nos permite deducir que verifican una ecuación en diferencias la cual tiene asociada un operador, que denominaremos *q-Hamiltoniano*, esto es

$$\mathfrak{H}_q(s)\Phi_n(s) = E_n\Phi_n(s). \tag{2}$$

El equivalente a dicho hamiltoniano en el caso clásico aparece con especial relevancia en la Mecánica Cuántica, por ejemplo, el oscilador armónico no relativista. De hecho, uno de los apartados de este trabajo consiste en obtener condiciones necesarias y suficientes para que el $q$-hamiltoniano que obtengamos pueda ser factorizado mediante operadores de creación $\mathfrak{a}^{\downarrow}(s)$ y destrucción $\mathfrak{a}^{\uparrow}(s)$, esto es

$$\mathfrak{a}^{\uparrow}(s)\mathfrak{a}^{\downarrow}(s) = \mathfrak{H}_q(s)$$

y además, se verifique la relación de conmutación

$$[\mathfrak{a}^{\uparrow}(s), \mathfrak{a}^{\downarrow}(s)]_{\xi} = \mathfrak{a}^{\uparrow}(s)\mathfrak{a}^{\downarrow}(s) - \xi\mathfrak{a}^{\downarrow}(s)\mathfrak{a}^{\uparrow}(s) = I,$$

donde $[\mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s)]_{\xi}$ es el equivalente al commutator utilizado en la física clásica.
En el capítulo 5, daremos la prueba de la racionalidad de $\pi^2$, $\zeta(3)$,

$$h_p(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1 - q^k}, \quad 0 < q = p^{-1} < 1, \tag{3}$$

y

$$\ln_p(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^k - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-q)^k}{1 - q^k}, \qquad 0 < q = p^{-1} < 1. \tag{4}$$

Para ello utilizaremos los $q$-polinomios pequeños de Legendre y los polinomios de Legendre clásicos. Asimismo, introduciremos el concepto de $q$-polinomio ortogonal múltiple, que se define como aquel polinomio ortogonal respecto a $r$ medidas $q$-discretas asociadas al multiíndice $\vec{n} \in \mathbb{N}_0^r$, esto es,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=a_1}^{b_1-1} P_{\vec{n}}(s)x^k(s)\omega_1(s)\Delta x(s-\tfrac{1}{2}) = 0, \quad k = 0, \dots, n_1 - 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \displaystyle\sum_{s=a_r}^{b_r-1} P_{\vec{n}}(s)x^k(s)\omega_r(s)\Delta x(s-\tfrac{1}{2}) = 0, \quad k = 0, \dots, n_r - 1, \end{cases} \tag{5}$$

siendo $P_{\vec{n}}(s)$ un polinomio de grado a lo más, $|\vec{n}| = n_1 + \cdots + n_r$.
Así, la estructura del trabajo es la siguiente, en el segundo capítulo introduciremos las nociones más importantes de los $q$-polinomios así como la parte relativa a la factorización del hamiltoniano asociado e introduciremos los $q$-polinomios de Legendre. En el tercer capítulo definiremos los aproximantes de Padé simultáneos, denominados de Hermite-Padé. En el cuarto capítulo definiremos los $q$-polinomios ortogonales múltiples. En el quinto capítulo como aplicación daremos la prueba de irracionalidad de las series (3) y (4). Por último, en el sexto capítulo expondremos las conclusiones y los problemas abiertos.

# 2. Polinomios hipergeométricos en redes no uniformes: los $q$-polinomios

En este capítulo vamos a estudiar las principales características de los $q$-polinomios. Estas funciones especiales (o $q$-funciones como suelen denominarse) tienen un sinfín de aplicaciones en diferentes áreas de la matemática y la física, por ejemplo en la teoría de representación de grupos, teoría de números, etc.
De entre las diferentes técnicas que se conocen para tratar los $q$-polinomios, quizás, una de las más tradicionales es la que considera a los $q$-polinomios como *$q$-series hipergeométricas básicas* [38]

$$
{}_r\varphi_p\left(\begin{array}{c} a_1,\ldots,a_r \\ b_1,\ldots,b_p \end{array}\,\middle|\, q;z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_k\cdots(a_r;q)_k}{(b_1;q)_k\cdots(b_p;q)_k}\frac{z^k}{(q;q)_k}\left((-1)^k q^{\frac{k}{2}(k-1)}\right)^{p-r+1}, \qquad (6)
$$

donde $(a;q)_m := \prod_{k=0}^{m-1}(1-aq^k)$.
Sin embargo, este punto de vista no es el más apropiado al considerar por separado cada una de las familias a estudiar [38]. En cambio, un estudio más sistemático de los $q$-polinomios consiste en considerarlos como polinomios de variable *discreta* soluciones de la ecuación que resulta de discretizar la ecuación hipergeométrica

$$
\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0,
$$

donde $\tilde{\sigma}(s)$ es un polinomio de grado a lo más, dos y $\tilde{\tau}(s)$ es un polinomio de grado exactamente uno y $\lambda$ es una constante.
Este segundo punto de vista es más general y contiene al anterior pues las soluciones de la ecuación (1) se expresan como series hipergeométricas básicas.

## 2.1. La ecuación hipergeométrica en una red no uniforme

Comenzaremos obteniendo una discretización de la ecuación diferencial hipergeométrica

$$
\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0. \qquad (7)
$$

Para ello se aproximarán las derivadas $y'$ e $y''$ de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &\sim \frac{1}{2}\left[\frac{y(x(s+h))-y(x(s))}{x(s+h)-x(s)} + \frac{y(x(s))-y(x(s-h))}{x(s)-x(s-h)}\right],\\
y''(x) &\sim \frac{1}{x\left(s+\frac{h}{2}\right)-x\left(s-\frac{h}{2}\right)}\left[\frac{y(x(s+h))-y(x(s))}{x(s+h)-x(s)} - \frac{y(x(s))-y(x(s-h))}{x(s)-x(s-h)}\right].
\end{aligned}
$$

La razón de escribir el factor $(x\left(s+\frac{h}{2}\right)-x\left(s-\frac{h}{2}\right))^{-1}$ es debido a que la diferencia generalizada

$$
\frac{y(x(s+h))-y(x(s))}{x(s+h)-x(s)},
$$

aproxima mejor a la primera derivada en $x\left(s-\frac{h}{2}\right)$, que en $x(s)$ (véase [55, pág. 55]). Sustituyendo las expresiones anteriores en (7) y haciendo el cambio lineal de la variable $s \to hs$ obtenemos la ecuación

$$\tilde{\sigma}(x(s))\frac{\Delta}{\Delta x\left(s-\frac{1}{2}\right)}\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}+\frac{\tilde{\tau}(x(s))}{2}\left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)}+\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right]+\lambda y(s)=0, \tag{8}$$

donde $\nabla f(s)=f(s)-f(s-1)$, $\Delta f(s)=f(s+1)-f(s)$, $\tilde{\sigma}(x(s))$ es un polinomio de grado a lo sumo 2 en $x(s)$, $\tilde{\tau}(x(s))$ de grado 1 y $\lambda$ es una constante. Se puede comprobar que (8) aproxima a (7) en la *red no uniforme* $x(s)$ hasta orden $O(h^2)$.

En adelante llamaremos *red* a una función $x(s)\in\mathcal{C}^2(\Omega)$, donde $\Omega$ es un dominio del plano complejo tal que $x(s)$, $s=0,1,\dots$ define un conjunto de puntos de $\mathbb{C}$ en los cuales vamos a discretizar la ecuación (7).

Consideremos ahora, en lugar de la ecuación (8) la siguiente ecuación equivalente

$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x(s-\frac{1}{2})}\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}+\tau(s)\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)}+\lambda y(s)=0, \tag{9}$$

donde $\sigma(s)=\tilde{\sigma}(x(s))-\frac{1}{2}\tilde{\tau}(x(s))\Delta x\left(s-\frac{1}{2}\right)$, $\tau(s)=\tilde{\tau}(x(s))$, y mediante $y(s)$ denotaremos las soluciones de la ecuación anterior, es decir, $y(s)\equiv y(x(s))$. Nótese que $\tau$ es también un polinomio de grado 1 en $x(s)$, no así $\sigma$, que en general, no es un polinomio[1] en $x(s)$. La ecuación (9) se denomina *ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico* y las soluciones de la misma cumplen la propiedad, comúnmente denominada *propiedad de hipergeometricidad*, esto es, sus *k-ésimas diferencias generalizadas*

$$y_k(s)=\frac{\Delta}{\Delta x_{k-1}(s)}\frac{\Delta}{\Delta x_{k-2}(s)}\cdots\frac{\Delta}{\Delta x(s)}\,y\equiv\Delta^{(k)}y(s), \tag{10}$$

donde $x_m(s)=x\left(s+\frac{m}{2}\right)$, satisfacen una ecuación del mismo tipo [55], [57],

$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x_k\left(s-\frac{1}{2}\right)}\frac{\nabla y_k(s)}{\nabla x_k(s)}+\tau_k(s)\frac{\Delta y_k(s)}{\Delta x_k(s)}+\mu_k y_k(s)=0, \tag{11}$$

donde

$$\tau_k(s)=\frac{\Delta\sigma(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}+\tau_{k-1}(s+1)\frac{\Delta x_k(s)}{\Delta x_{k-1}(s)},\ \mu_k=\mu_{k-1}+\frac{\Delta\tau_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)},\ \tau_0(s)=\tau(s),\ \mu_0=\lambda.$$

**Observación 2.1** *Por simplicidad en la notación, escribiremos $\nabla x_1(s)$ por $\Delta x(s-\frac{1}{2})$.*

De la ecuación (11) se deduce que

$$\mu_k=\lambda+\sum_{m=0}^{k-1}\frac{\Delta\tau_m(s)}{\Delta x_m(s)},\qquad \tau_k(s)=\frac{\sigma(s+k)-\sigma(s)+\tau(s+k)\Delta x\left(s+k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x_{k-1}(s)}. \tag{12}$$

[1] En nuestro trabajo utilizaremos $q-$polinomios en la red $x(s)=q^s$. En este caso, debido a la "linealidad" de la red, es fácil comprobar que $\sigma$ si es un polinomio en $x(s)$.

Luego si queremos que $P_n(s)_q$ sea de grado $n$, entonces $\mu_n = 0$. De ahí que

$$\lambda \equiv \lambda_n = -\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Delta \tau_m(s)}{\Delta x_m(s)} = -[n]_q \left\{ \left( \frac{q^{\frac{1}{2}(n-1)} + q^{-\frac{1}{2}(n-1)}}{2} \right) \tilde{\tau}' + [n-1]_q \frac{\tilde{\sigma}''}{2} \right\}, \tag{13}$$

donde $[n]_q$ denota el $q$-número

$$[z]_q = \frac{q^{\frac{z}{2}} - q^{-\frac{z}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Por otra parte, es importante destacar que no para cualquier red las ecuaciones (9) Y (11) tienen soluciones polinómicas de tipo hipergeométrico, es más, el siguiente resultado nos da una caracterización del tipo de red que debemos escoger.

**Teorema 2.1** *El conjunto más amplio de funciones $x(s)$ para las cuales (9) tiene como solución una familia de polinomios de tipo hipergeométrico viene dado por*

$$x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q), \quad q \in \mathbb{C}, \tag{14}$$

*donde $c_1, c_2, c_3$ son constantes que pueden depender de $q$ pero no de $s$.*

Pasemos ahora a introducir una de las familias de $q$-polinomios que emplearemos posteriormente para probar la irracionalidad de ciertos números reales.

## 2.2. Los $q$-Polinomios Pequeños de Legendre

Esta familia de $q$-polinomios se definen como

$$P_n(x|q) = {}_2\varphi_1\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{n+1} \\ q \end{array}; q, qx\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k (q^{n+1};q)_k}{(q;q)_k} \frac{q^k x^k}{(q;q)_k}, \qquad 0 < q < 1, \quad (15)$$

y son ortogonales en la red exponencial $x(s) = q^s$, esto es,

$$\sum_{s=0}^{\infty} q^s P_m(q^s|q) P_n(q^s|q) = \frac{q^n}{1 - q^{2n+1}} \delta_{n,m}. \quad (16)$$

De hecho, estos polinomios admiten la siguiente representación

$$P_n(x|q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p p^{-kn+k(k-1)/2}(-x)^k, \quad (17)$$

la cual nos será útil posteriormente. Nótese que

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, \quad (18)$$

son los denominados $q$-números combinatorios y que se satisface la siguiente relación

$$\lim_{q \to 1^-} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k},$$

Por lo tanto, podemos obtener fácilmente la expresión de los polinomios clásicos de Legendre que emplearemos para probar la irracionalidad de $\pi^2$ y $\zeta(3)$, o sea, se obtienen los polinomios de Legendre en $[0, 1]$ calculando el siguiente límite

$$\lim_{q \to 1^-} P_n(x|q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} (-x)^k = P_n(x).$$

Para obtener mayor información acerca de estos $q$-polinomios véase [45].

## 2.3. El método de factorización de ecuaciones en diferencias de tipo hipergeométrico sobre redes no uniformes

Dicho método surgió para tratar de simplificar el cálculo del espectro asociado a una ecuación diferencial con condiciones de contorno así como las autofunciones ortonormales asociadas a los mismos. De hecho, tiene una gran importancia desde el punto de vista de la teoría de grupos, y por tanto, en el estudio de diversos sistemas mecánico-cuánticos pudiendo aplicarse una aproximación algebraica para generalizar la descripción de un oscilador no relativista mediante el significado de los operadores de creación y destrucción. En mecánica cuántica no relativista, el hamiltoniano de un oscilador lineal (con la normalización $\hbar = m = c = 1$) se define como

$$H(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{2}x^2. \tag{19}$$

Dicho hamiltoniano $H(x)$ puede factorizarse mediante los operadores de creación $\mathfrak{a}^+(x)$ y destrucción $\mathfrak{a}(x)$:

$$\mathfrak{a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right), \quad \mathfrak{a}^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right), \quad \xi = \sqrt{\omega}\,x,$$

Así, $H(x) = \omega\left[\mathfrak{a}^+(x)\mathfrak{a}(x) + \frac{1}{2}\right]$. Además, dichos operadores satisfacen la relación de conmutación

$$[\mathfrak{a}(x), \mathfrak{a}^+(x)] = \mathfrak{a}(x)\mathfrak{a}^+(x) - \mathfrak{a}^+(x)\mathfrak{a}(x) = I. \tag{20}$$

Luego, de (19) y (20) deducimos que

$$[\mathfrak{a}(x), H(x)] = \omega\mathfrak{a}(x), \quad [\mathfrak{a}^+(x), H(x)] = -\omega\mathfrak{a}^+(x). \tag{21}$$

N. M. Atakishiyev, A. Frank y K. B. Wolf demostraron que el conjunto formado por el hamiltoniano $H(x)$, la identidad $I$ y los operadores $\mathfrak{a}(x), \mathfrak{a}^+(x)$ forman un álgebra de Lie cerrada. Esto permite calcular el espectro de $H(x)$ y en consecuencia, el grupo de simetría dinámica del oscilador (ver [51]).

El objetivo de este apartado es realizar un desarrollo análogo del oscilador armónico en el marco de los $q$-polinomios dando lugar al operador $q$-hamiltoniano. Para definirlo partiremos de las condiciones de ortogonalidad que satisfacen la gran mayoría de $q$-polinomios

$$\sum_{s=a}^{b-1} P_n(s)_q P_m(s)_q \rho(s)\nabla x_1(s) = \delta_{n,m}d_n^2. \tag{22}$$

De aquí escribiremos las funciones ortonormales asociadas a dichos $q$-polinomios, esto es,

$$\Phi_n(s) = d_n^{-1}\sqrt{\rho(s)}\,P_n(s)_q. \tag{23}$$

Por tanto, si $P_n(s)_q$ es solución de (9), entonces $\Phi_n(s)$ es solución de la ecuación

$$\sqrt{\nu_\sigma(s+1)\nu_\Theta(s)}y(s+1) + \sqrt{\nu_\sigma(s)\nu_\Theta(s-1)}y(s-1) - (\nu_\sigma(s)+\nu_\Theta(s))y(s) = \lambda\nabla x_1(s)y(s), \tag{24}$$

donde

$$\nu_\sigma(s) = \frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} \quad \text{y} \quad \nu_\Theta(s) = \frac{\Theta(s)}{\Delta x(s)} = \frac{\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - \frac{1}{2})}{\Delta x(s)}.$$

De (24) se deduce que el $q$-hamiltoniano que debemos considerar es

$$H_q(s) \equiv -\frac{1}{\nabla x_1(s)} \left( \sqrt{\nu_\sigma(s+1)\nu_\Theta(s)}\, e^{\partial_s} + \sqrt{\nu_\sigma(s)\nu_\Theta(s-1)}\, e^{-\partial_s} - (\nu_\sigma(s) + \nu_\Theta(s))I \right), \tag{25}$$

donde $I$ es la identidad y $e^{\alpha\partial_s} f(s) = f(s+\alpha)$ para $\alpha \in \mathbb{C}$.

Partiendo de esta definición, en un primer trabajo siguiendo las ideas de G. Bangerezako [24], se obtuvieron resultados análogos (véase [4]). Sin embargo, uno de las dificultades que presenta este procedimiento consiste en que los operadores de creación y destrucción dependen del grado de los polinomios, esto es, de $n$, de ahí que se trate de analizar bajo qué circunstancias se pueden encontrar los operadores que factoricen al $q$-Hamiltoniano y no dependan de $n$. Lo que presentaremos a continuación es la continuación natural de dos trabajos, uno de los cuales fue presentado durante una conferencia en Bexbach en 2002 [3] y el segundo recientemente publicado en la revista Journal of Physics A (véase [5]).

Consideremos las siguientes funciones normalizadas

$$\Phi_n(s) = \frac{A(s)\sqrt{\rho(s)}}{d_n} P_n(s)_q, \tag{26}$$

donde $A(s)$ es una función continua arbitraria que no se anula en el intervalo $[a, b]$ de ortogonalidad de los polinomios $P_n$. Dichas funciones verifican la siguiente condición de ortogonalidad asociada a (22)

$$\langle \Phi_n(s), \Phi_m(s) \rangle = \sum_{s=a}^{b-1} \Phi_n(s)\Phi_m(s) \frac{\nabla x_1(s)}{A^2(s)} = \delta_{n,m}.$$

En particular, para $A(s) = \sqrt{\nabla x_1(s)}$ tenemos que dichas funciones son ortonormales respecto al anterior producto escalar con paso igual a 1.

Por otra parte, la ecuación en diferencias que verifican dichas funciones tiene asociado el siguiente $q$-hamiltoniano

$$\mathfrak{H}_q(s) := \frac{A(s)}{\nabla x_1(s)} \left( (\nu_\sigma(s) + \nu_\Theta(s))I - \sqrt{\nu_\sigma(s+1)\nu_\Theta(s)}\, e^{\partial_s} - \sqrt{\nu_\sigma(s)\nu_\Theta(s-1)}\, e^{-\partial_s} \right) \frac{1}{A(s)}, \tag{27}$$

es decir, que $\mathfrak{H}_q(s)\Phi_n(s) = \lambda_n \Phi_n(s)$. Por tanto, el espectro de la ecuación en diferencias (9) coincide con del problema original siendo las funciones normalizadas las autofunciones de dicho operador $\mathfrak{H}_q(s)$, Así, una vez definido nuestro $q$-hamiltoniano vamos a plantear dos problemas:

**Problema 1:** Encontrar dos operadores $a(s)$ y $b(s)$ y una constante $\varsigma$ tales que factoricen $\mathfrak{H}_q(s)$, esto es, $b(s)a(s) = \mathfrak{H}_q(s)$, y además se satisfaga la condición de conmutación $[a(s), b(s)]_\varsigma = \Lambda I$, donde $\Lambda \neq 0$ es una constante e $I$ es el operador identidad.

**Problema 2:** Encontrar operadores que verifiquen el problema 1, pero que además sean operadores de creación y destrucción, o sea,

$$a(s)\Phi_n(s) = D_n\Phi_{n-1}(s), \quad b(s)\Phi_n(s) = U_n\Phi_{n+1}(s).$$

Teniendo en cuenta estos problemas definamos los siguientes operadores.

**Definición 2.1** *Dados $\alpha \in \mathbb{C}$ y $B(s)$ una función que no se anula en el intervalo $[a,b]$, definimos los $\alpha$-*operadores hacia arriba *y* hacia abajo

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_\alpha^{\downarrow}(s) :=& \frac{B(s)}{\sqrt{\nabla x_1(s)}}\, e^{-\alpha\partial_s}\left(e^{\partial_s}\sqrt{\nu_\sigma(s)} - \sqrt{\nu_\Theta(s)}I\right)\frac{1}{A(s)}, \\ \mathfrak{a}_\alpha^{\uparrow}(s) :=& \frac{1}{\nabla x_1(s)}A(s)\left(\sqrt{\nu_\sigma(s)}\, e^{-\partial_s} - \sqrt{\nu_\Theta(s)}I\right)e^{\alpha\partial_s}\frac{\sqrt{\nabla x_1(s)}}{B(s)} \end{aligned} \tag{28}$$

Un primer resultado teniendo en cuenta estos operadores es el siguiente

**Teorema 2.2** *Los operadores $\mathfrak{a}_\alpha^{\downarrow}(s)$ y $\mathfrak{a}_\alpha^{\uparrow}(s)$ factorizan al q-hamiltoniano (27), esto es,*

$$\mathfrak{a}_\alpha^{\uparrow}(s)\mathfrak{a}_\alpha^{\downarrow}(s) = \mathfrak{H}_q(s) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},\, B(s).$$

Ahora, al igual que en mecánica cuántica definimos el análogo al conmutador.

**Definición 2.2** *Dado un número complejo no nulo $\varsigma$, definiremos el* $\xi$-conmutador de $a(s)$ y $b(s)$ *como*

$$[a(s), b(s)]_\varsigma = a(s)b(s) - \varsigma b(s)a(s).$$

Teniendo en cuenta esta definición veamos bajo qué condiciones el problema 1 tiene solución.

**Teorema 2.3** *Los operadores $b(s;q) = \mathfrak{a}_\alpha^{\uparrow}(s;q)$ y $a(s;q) = \mathfrak{a}_\alpha^{\downarrow}(s;q)$ definidos en (28) son solución del problema 1 para ciertos $\alpha$, $\varsigma$, $\Lambda$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\frac{\nabla x(s)}{\nabla x_1(s-\alpha)}\sqrt{\frac{\nabla x_1(s-1)\nabla x_1(s)}{\nabla x(s-\alpha)\Delta x(s-\alpha)}}\sqrt{\frac{\sigma(s-\alpha)\sigma(-s-\mu+\alpha)}{\sigma(s)\sigma(-s-\mu+1)}} = \varsigma, \tag{29}$$

*y*

$$\frac{1}{\Delta x(s-\alpha)}\left(\frac{\sigma(s-\alpha+1)}{\nabla x_1(s-\alpha+1)} + \frac{\sigma(-s-\mu+\alpha)}{\nabla x_1(s-\alpha)}\right) - \varsigma\,\frac{1}{\nabla x_1(s)}\left(\frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)} + \frac{\sigma(-s-\mu)}{\Delta x(s)}\right) = \Lambda. \tag{30}$$

**Demostración:** Teniendo en cuenta la expresión de los operadores $a_\alpha^{\uparrow}(s)$ and $a_\alpha^{\downarrow}(s)$, realizando un cálculo sencillo obtenemos que $a_\alpha^{\downarrow}(s)a_\alpha^{\uparrow}(s) = A_1(s)e^{\partial_s} + A_2(s)e^{-\partial_s} + A_3(s)I$, donde

$$
\begin{aligned}
A_1(s) &= -\sqrt{\frac{\nabla x_1(s+1)}{\nabla x_1(s)}}\frac{A(s)}{A(s+1)}\sqrt{\frac{\sigma(s+1-\alpha)\sigma(-s-\mu-1+\alpha)}{\Delta x(s-\alpha)\Delta x(s+1-\alpha)}}\frac{1}{\nabla x_1(s+1-\alpha)},\\
A_2(s) &= -\sqrt{\frac{\nabla x_1(s-1)}{\nabla x_1(s)}}\frac{A(s)}{A(s-1)}\sqrt{\frac{\sigma(s-\alpha)\sigma(-s-\mu+\alpha)}{\Delta x(s-1-\alpha)\Delta x(s-\alpha)}}\frac{1}{\nabla x_1(s-\alpha)},\\
A_3(s) &= \frac{1}{\Delta x(s-\alpha)}\left[\frac{\sigma(s+1-\alpha)}{\nabla x_1(s+1-\alpha)}+\frac{\sigma(-s-\mu+\alpha)}{\nabla x_1(s-\alpha)}\right].
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Análogamente usando (27) y el teorema 2.2 obtenemos $a^{\uparrow}_{\alpha}(s)a^{\downarrow}_{\alpha}(s)=\mathfrak{H}(s;q)=B_1(s)e^{\partial_s}+B_2(s)e^{-\partial_s}+B_3(s)I$, donde ahora

$$
\begin{aligned}
B_1(s) &= -\frac{1}{\nabla x_1(s)}\frac{A(s)}{A(s+1)}\frac{\sqrt{\sigma(-s-\mu)\sigma(s+1)}}{\nabla x(s+1)},\\
B_2(s) &= -\frac{1}{\nabla x_1(s)}\frac{A(s)}{A(s-1)}\frac{\sqrt{\sigma(-s-\mu+1)\sigma(s)}}{\nabla x(s)},\\
B_3(s) &= \frac{1}{\nabla x_1(s)}\left[\frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)}+\frac{\sigma(-s-\mu)}{\Delta x(s)}\right].
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Por tanto,

$$
[a^{\downarrow}_{\alpha}(s),a^{\uparrow}_{\alpha}(s)]_{\varsigma}=\Big(A_1(s)-\varsigma B_1(s)\Big)e^{\partial_s}+\Big(A_2(s)-\varsigma B_2(s)\Big)e^{-\partial_s}+\Big(A_3(s)-\varsigma B_3(s)\Big)I. \tag{33}
$$

Luego, para cancelar los dos primeros términos de la parte derecha de (33) ha de verificarse

$$
A_1(s)-\varsigma\, B_1(s)=0, \qquad A_2(s)-\varsigma\, B_2(s)=0. \tag{34}
$$

Por último, estas dos condiciones son equivalentes a

$$
\frac{A_1(s)}{B_1(s)}=\frac{A_2(s+1)}{B_2(s+1)}, \quad A_1(s)-\varsigma\, B_1(s)=0,
$$

que nos conducen a las condiciones exigidas en el teorema. □

Este teorema nos permite estudiar diferentes familias de $q$-polinomios encontrando que una gran cantidad de ellos, bajo ciertas condiciones, satisfacen dicho teorema. Veamos algunos de estos ejemplos:

1. Los polinomios de Stieltjes-Wigert $S_n(x;q)$. Las funciones ortonormales asociadas a estos polinomios se definen como

$$
\Phi_n(x;q)=\frac{(q;q)_\infty}{q^{n/2}}\sqrt{\frac{(-x,-q/x;q)_\infty \log q^{-1}}{(q^{n+1};q)_\infty}}\;{}_1\phi_1\left(\begin{array}{c} q^{-n} \\ 0 \end{array}\middle| q;-xq^{n+1}\right), \quad x(s)=q^s,
$$

   En este caso hemos elegido $A(s)=\sqrt{\nabla x_1(s)}$, por tanto tales funciones son ortonormales.

Además, dado que los parámetros para estos $q$-polinomios son $\sigma(s) = q^{s-1}$ y $\sigma(s) + \tau(s)\nabla x_1(s) = q^{2s}$ [44], el $q$-hamiltoniano es

$$\mathfrak{H}(s;q) = \frac{1}{(1-q)} \left\{ \left(1+q^{-s}\right) I - q^{-(s+1)/2} e^{\partial_s} - q^{-s/2}\, e^{-\partial_s} \right\},$$

el cual satisface $\mathfrak{H}(s;q)\Phi_n(q^s;q) = \frac{1-q^n}{1-q}\, \Phi_n(q^s;q)$.

Si ahora tratamos de comprobar las condiciones del teorema 2.3, constatamos que de la primera condición (29) se deduce que $\varsigma = q^{\alpha/2}$ y sustituyendo dicha expresión en la segunda obtenemos que $\alpha = 2$, o sea, $\varsigma = q$. Por tanto,

$$\mathfrak{a}^{\downarrow}(s;q) := \mathfrak{a}_2^{\downarrow}(s;q) = \frac{1}{\sqrt{1-q}} \left(e^{-2\partial_s} - e^{-\partial_s} q^{-s/2}\right),$$

$$\mathfrak{a}^{\uparrow}(s;q) := \mathfrak{a}_2^{\uparrow}(s;q) = \frac{1}{\sqrt{1-q}} \left(e^{2\partial_s} - q^{-s/2} e^{\partial_s}\right),$$

$\mathfrak{H}(s;q) = \mathfrak{a}^{\uparrow}(s;q)\mathfrak{a}^{\downarrow}(s;q)$ and $[\mathfrak{a}^{\downarrow}(s;q), \mathfrak{a}^{\uparrow}(s;q)]_q = I$.

Además, no es difícil comprobar que en este caso los operadores $\mathfrak{a}^{\uparrow}(s;q)$ y $\mathfrak{a}^{\downarrow}(s;q)$ son de aniquilación y de creación para las funciones $\Phi_n(q^s;q)$ (véase [44, Exp. (3.27.6),(3.27.8)]).

2. Los pequeños polinomios de Laguerre o de Wall $p_n(x;a|q)$. En este caso, las funciones ortonormales asociadas se definen como

$$\Phi_n(s;a;q) = \frac{(aq;q)_\infty}{\sqrt{(q;q)_s (q;q)_n (aq^{n+1};q)_\infty}} (aq)^{\frac{s-n}{2}}\ {}_2\phi_1 \left( \begin{array}{c} q^{-n}, 0 \\ aq \end{array} \middle| q; q^{s+1} \right), \quad x(s) = q^s.$$

Aquí, hemos elegido $A(s) = \sqrt{\nabla x_1(s)}$, lo que garantiza que estas funciones sean ortonormales.

Además, $\sigma(s) = q^{-1} q^s (q^s - 1)$ y $\sigma(s) + \tau(s)\nabla x_1(s) = -aq^s$, por tanto, el $q$-hamiltoniano asociado es

$$\mathfrak{H}(s;a;q) = \frac{1}{(1-q)x} \left( q(a+1-x)I - \sqrt{aq(1-qx)}\, e^{\partial_s} - q\sqrt{aq(1-x)}\, e^{-\partial_s} \right),$$

teniendo como autofunciones $\Phi_n(s;a;q)$, esto es,

$$\mathfrak{H}(s;a;q)\Phi_n(s;a;q) = \frac{1-q^{-n}}{1-q^{-1}}\, \Phi_n(s;a;q).$$

utilizando las condiciones del teorema 2.3 deducimos que $\alpha = 0$, $\varsigma = q^{-1/2}$ y que el parámetro $a$ es igual a $q^{-1/2}$. Luego, los operadores que consideraremos son

$$\mathfrak{a}(s;a;q) := \frac{1}{\sqrt{(1-q)\,x}} \left( \sqrt{(1-qx)}\, e^{\partial_s} - \sqrt{aq}\, I \right),$$

$$\mathfrak{a}^{\dagger}(s;a;q) := \frac{1}{\sqrt{(1-q)\,x}} \left( \sqrt{q(1-x)}\, e^{-\partial_s} - \sqrt{aq}\, I \right).$$

Es fácil comprobar que tales operadores no son operadores de aniquilación y creación.

Un posterior análisis nos permite discutir bajo qué condiciones el problema 1 tenía solución, buscando condiciones de tipo espectral para el $q$-hamiltoniano, y demostramos el siguiente resultado.

**Teorema 2.4** *Si el problema 1 tiene solución para el hamiltoniano* $\mathfrak{H}_q(s)$ *cuyo espectro es* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *entonces dicho espectro a de ser* $q$*-lineal o* $q^{-1}$*-lineal , i.e.*

$$\lambda_n - q\lambda_{n-1} = const., \quad o \quad \lambda_n - q^{-1}\lambda_{n-1} = const.$$

Respecto a cómo debe ser la solución del problema 2 se sabe bastante poco, pero una de las claves es que la solución de la ecuación de tipo Pearson $\rho(s)$ satisfaga $\sigma(s+1)\rho(s+1) = \rho_1(s)$ y que dependa de los parámetros de la misma manera que lo hace $\rho(s)$; por lo general dichos parámetros varían en su dependencia. Por ejemplo, en el caso de los polinomios de Stieltjes-Wigert al no haber parámetros esto no sucede mientras que en el caso de los polinomios de Laguerre/Wall

$$\rho^W(s,a) = \frac{(aq)^s}{(q;q)_s} \quad \text{y} \quad \rho_1^W(s,a) = aq\rho^W(s,aq).$$

Otro problema interesante que se plantea es si dichos operadores que factorizan al $q$-hamiltoniano tienen algún tipo de estructura. Siguiendo las observaciones del Prf. Natig Atakishiev comprobamos que, efectivamente, en ciertos casos estos operadores junto con el hamiltoniano original y el operador identidad $I$, formaban lo que se denomina un álgebra de Lie, $\mathcal{A}$, respecto al conmutador definido $[\cdot,\cdot]_\varsigma$, esto es,

1. $[x,x]_\varsigma = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{A}$ antisimetría.
2. $[x,[y,z]_\varsigma]_\varsigma + [y[z,x]_\varsigma]_\varsigma + [z,[x,y]_\varsigma]_\varsigma] = 0 \quad \forall\, x,y,z \in \mathcal{A}$ (Identidad de Jacobi).

$\mathcal{A}$ se denomina álgebra dinámica. Utilizando esta definición deducimos que algunas familias de $q$-polinomios que tenían solución del problema 2, mas concretamente en unos proceedings presentados en un congreso realizado en Bexbach encontramos dos de las álgebras más conocidas dentro del campo de los $q$-polinomios, estas son el álgebra $sp(2,\Re)$ y $so(3)$ y vimos que los operadores asociados a las funciones ortonormales asociadas a los $q$-polinomios de Meixner formaban el álgebra de Lie $sp(2,\Re)$ mientras que en el caso de los $q$-polinomios de Kravchuk el álgebra asociada era $so(3)$.

## 3. Aproximaciones de Padé simultáneas

El objetivo de este capítulo es mostrar cómo se puede aproximar racionalmente varias funciones de manera simultánea. Este concepto data del siglo pasado y se conoce como aproximación de Padé y consiste en considerar $r$ funciones $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ con un desarrollo formal cerca del infinito dado por

$$f_j(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,j} \frac{1}{z^{k+1}}, \qquad j = 1, \ldots, r,$$

y tomar un multi-índice $\vec{n}$, o sea, $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}_0^r$. Con estos datos, distinguiremos dos tipos de aproximaciones distintas:

1. Aproximación de tipo I:
   Encontrar polinomios $A_{n_1}, \ldots, A_{n_r}$, donde $A_{n_j}$ es de grado a lo más $n_j - 1$ y un polinomio $B_{\vec{n}}$ tal que

$$A_{n_1}(z)f_1(z) + \cdots + A_{n_r}(z)f_r(z) - B_{\vec{n}}(z) = O\left(\frac{1}{z^{|\vec{n}|}}\right), \quad |\vec{n}| = n_1 + n_2 + \cdots + n_r. \tag{35}$$

2. Aproximación de tipo II:
   Hallar un polinomio $P_{\vec{n}}$ de grado a lo más $|n|$, y los polinomios $Q_{\vec{n},1}, \ldots, Q_{\vec{n},r}$ tales que

$$P_{\vec{n}}(z)f_j(z) - Q_{\vec{n},j}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{36}$$

Una noción importante en las aproximación de Hermite-Padé es la normalidad.

**Definición 3.1** *El multi-índice $n \in \mathbb{N}_0^r$ se dice* normal *para un problema de aproximación si se obtienen polinomios con el mayor grado posible.*

**Observación 3.1** *En el caso que todos los multi-índices sean normales se tiene la unicidad para el problema.*

por ejemplo, el multi-índice es normal para la aproximación de tipo I si el grado de cada $A_{n_j}$ es $n_j - 1$. De la misma forma $n$ es normal en la aproximación de tipo II si el grado de $P_{\vec{n}}$ es $|n|$.
Hay un tipo de funciones particularmente importantes para estos tipos de aproximaciones, éstas son las funciones de Markov

$$f(z) = \int_a^b \frac{d\mu(x)}{z - x}, \tag{37}$$

donde $[a, b]$ es un intervalo real acotado y $\mu$ es una medida real positiva sobre dicho intervalo $[a, b]$.
Una de las principales ventajas de emplear estas funciones de Markov es que bajo ciertas condiciones relativas a las medidas todos sus índices son normales. Veamos algunos de estos casos.

## 3.1. Sistemas de Chebyshev

Estos sistemas, se emplean a menudo en la teoría de la aproximación, estadística matemática, etc (ver [57]). Pasemos a definirlo.

**Definición 3.2** *Un conjunto de funciones reales*

$$u_0(t),\ u_1(t),\ \ldots,\ u_n(t), \tag{38}$$

*continuas en un intervalo real* $[a,b]$*, se dice que forman un* sistema de Chebyshev *(o T-sistema*[2]*) de orden* $n \in \mathbb{N}_0$*, si toda función de la forma*

$$P(t) = \alpha_0 u_0(t) + \cdots + \alpha_n u_n(t), \qquad \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0^2 + \cdots + \alpha_n^2 > 0,$$

*se anula a lo más en* $n$ *puntos de* $[a,b]$*.*

Esta definición es equivalente a que el determinante

$$U(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \det \begin{pmatrix} u_0(t_0) & u_1(t_0) & \cdots & u_n(t_0) \\ u_0(t_1) & u_1(t_1) & \cdots & u_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0(t_n) & u_1(t_n) & \cdots & u_n(t_n) \end{pmatrix},$$

del sistema lineal

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k(t_j) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

sea no nulo para $a \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le b$. Como $U$ es una función continua y $U \neq 0$, entonces $U$ no cambia de signo en cada uno de los subintervalos $(t_i, t_{i+1})$. Si $U > 0$, a (38) se le denomina $T_+$-sistema.

## 3.2. Sistemas de Angelesco

Este tipo de sistema fue introducido por Angelesco [9] en 1919. Dicho sistema utiliza funciones de Markov de la forma

$$f_j(z) = \int_{\Delta_j} \frac{d\mu_j(x)}{z - x}, \quad j = 1, 2 \ldots, r,$$

donde $\Delta_j$ son intervalos disjuntos dos a dos, esto es, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$, y $\mu_j$ es una medida positiva sobre los $\Delta_j$, o sea, cada función $f_j$ es una función de Markov y los soportes de las medidas $\mu_i$ son $r$ intervalos disjuntos. Otro interesante sistema es el de Angelesco-Chebyshev (AT-sistema) donde tenemos un conjunto de funciones de

[2]Se llama así debido a que en francés Chebyshev se transcribe como **T**chebysheff

Markov pero definidas mediante distintas medidas y soportadas sobre un único intervalo. En particular,

$$f_j(z) = \int_a^b \frac{d\mu_j(t)}{z-t}, \quad d\mu_j(t) = u_j(t)d\mu(t), \quad j = 1, \dots, r,$$

donde $u_1(t), \dots, t^{n_1-1}u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), \dots, t^{n_r-1}u_r(t)$ es un sistema de Chebyshev sobre $[a,b]$ y $\mu$ es una medida positiva sobre $[a,b]$.
Para las funciones de tipo Markov, los denominadores de la aproximación de Padé verifican condiciones de ortogonalidad. Análogamente, para la aproximación de Hermite-Padé deduciremos un nuevo tipo de ortogonalidad simultánea. Más aún, plantearemos dos problemas de aproximación simultánea definidas con anterioridad: aproximación de Hermite-Padé de tipo I y tipo II. Para la aproximación de tipo I sobre un sistema de Angelesco podemos tomar de nuevo una curva cerrada $\Gamma$ encerrando a los intervalos $\Omega_j$, luego de (35) se deduce que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (A_{n_1}(z)f_1(z) + \cdots + A_{n_r}(z)f_r(z))z^k dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma B_{\vec{n}}(z)z^k dz = \sum_{j=|n|}^{\infty} a_j \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^{k-j}dz. \tag{39}$$

La segunda integral del miembro izquierdo de la igualdad (39) es igual a cero por el teorema de Cauchy. De la misma manera, el miembro derecho se anula para $k < |n| - 1$. Usando que cada $f_j$ es una función de tipo Markov y cambiando el orden de integración (teorema de Fubini) se obtienen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{\Omega_j} A_{n_j}(x)x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, |n| - 2. \tag{40}$$

Los polinomios $B_{\vec{n}}$ se expresan mediante

$$B_{\vec{n}}(z) = \sum_{j=1}^{r}\int_{\Omega_j} \frac{A_{n_j}(z) - A_{n_j}(x)}{z-x} d\mu_j(x),$$

puesto que

$$\sum_{j=1}^{r} A_{n_j}(z)f_j(z) - B_{\vec{n}}(z) = \sum_{j=1}^{r}\int_{\Omega_j} \frac{A_{n_j}(x)}{z-x} d\mu_j(x). \tag{41}$$

Obsérvese que la condición (35) se cumple, de hecho basta desarrollar $1/(z-x)$ en potencias de $1/z$.
Para AT-sistemas las condiciones de ortogonalidad (40) se expresan como sigue

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{r} A_{n_j}(x)u_j(x)\right) x^k d\mu(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, |n| - 2. \tag{42}$$

Además,

$$B_{\vec{n}}(z) = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{A_{n_j}(z) - A_{n_j}(x)}{z-x} u_j(x)\right) d\mu(x),$$

dado que

$$\sum_{j=1}^{r} A_{n_j}(z) f_j(z) - B_{\vec{n}}(z) = \int_a^b \sum_{j=1}^{r} \frac{A_{n_j}(x)}{z-x} d\mu(x). \tag{43}$$

En la aproximación de tipo II las condiciones de ortogonalidad están distribuidas en $r$ partes. Para un sistema de Angelesco y una curva cerrada $\Gamma$, encerrando a todos los intervalos $\Omega_j$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} P_{\vec{n}}(z) f_j(z) z^k dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} Q_{\vec{n},j}(z) dz = \sum_{i=n_j+1}^{\infty} a_{i,j} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} z^{k-i} dz. \tag{44}$$

La segunda integral del miembro izquierdo de la igualdad (44) es igual a cero por el teorema de Cauchy y el término de la derecha tiene residuo no nulo para $k < n_j$. Intercambiando el orden de integración (teorema de Fubini) obtenemos las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\int_{\Omega_j} P_{\vec{n}}(x) x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n_j - 1,\ j = 1, 2, \ldots, r. \tag{45}$$

El numerador $Q_{\vec{n},j}$ de la aproximación de Hermite-Padé viene dado por

$$Q_{\vec{n},j}(z) = \int_{\Omega_j} \frac{P_{\vec{n}}(z) - P_{\vec{n}}(x)}{z-x} d\mu_j(x),$$

Así, el residuo de la aproximación de tipo II para un sistema de Angelesco es

$$P_{\vec{n}}(z) f_j(z) - Q_{\vec{n},j}(z) = \int_{\Omega_j} \frac{P_{\vec{n}}(x)}{z-x} d\mu_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{46}$$

Análogamente, las expresiones para la aproximación de tipo II correspondiente a un AT-sistema son:

$$\int_a^b P_{\vec{n}}(x) x^k u_j(x) d\mu(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n_j - 1,\ j = 1, 2, \ldots, r, \tag{47}$$

para las condiciones de ortogonalidad y

$$Q_{\vec{n},j}(z) = \int_a^b \frac{P_{\vec{n}}(z) - P_{\vec{n}}(x)}{z-x} u_j(x) d\mu(x),$$

para el numerador de los aproximantes. Así,

$$P_{\vec{n}}(z) f_j(z) - Q_{\vec{n},j}(z) = \int_a^b \frac{P_{\vec{n}}(x)}{z-x} u_j(x) d\mu(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{48}$$

Una vez introducidas las nociones básicas sobre las aproximaciones de Hermite-Padé así como los $q$-polinomios ortogonales, pasaremos a definir una generalización de $q$-polinomio ortogonal que relacione ambos conceptos.

## 4. $q$-polinomios ortogonales múltiples

A partir de la aproximación de Hermite-Padé se define una nueva clase de polinomios ortogonales que generaliza a los $q$-polinomios, estas nuevas funciones son los denominados $q$-polinomios ortogonales múltiples. Además, satisfacen simultáneamente diferentes condiciones de ortogonalidad. Demos una definición más formal del término.
Consideremos un entero no negativo $r$, $r$ medidas $q$-clásicas

$$\omega_1(s), \cdots, w_r(s),$$

y el multi-índice $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$. Se define el $q$-polinomio múltiple, $P_{\vec{n}}$ asociado a estas medidas, como aquel polinomio de grado, a lo más, $|\vec{n}| = n_1 + \cdots n_r$ que satisface las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{s \in \Omega_i} P_{\vec{n}}(s) x^k(s) \omega_i(s) \nabla x_1(s) = 0, \quad k = 0, \ldots, n_i - 1, \quad i = 1, \ldots, r,$$

donde $\mathrm{sop}(\omega_i) = \Omega_i \subseteq \mathbb{R}$ para cada $i = 1, \ldots, r$.
Es evidente que los $q$-polinomios son un caso particular de los $q$-polinomios ortogonales múltiples para $r = 1$. Actualmente este tipo de funciones están en pleno estudio y aún no se conocen muchas propiedades de las mismas, de hecho el estudio de este tipo de funciones es una de las partes fundamentales de la tesis doctoral, cuyo punto de partida es esta memoria.
Antes de pasar a estudiar algunas aplicaciones de la aproximación simultánea a la teoría de números es importante observar que, al igual que los $q$-polinomios ortogonales son los denominadores de los aproximantes de Padé diagonales, los $q$-polinomios ortogonales múltiples son los denominadores de los aproximantes de Hermite-Padé. De ahí la importancia de conocer este tipo de funciones de cara a obtener resultados más “finos” a la hora de aproximar funciones o estudiar la naturaleza algebraica de ciertos números.

# 5. Teoría de la aproximación y Teoría analítica de números

## 5.1. Introducción

Aquí constataremos cómo muchos de las cuestiones antes expuestas, sobre la teoría de aproximación racional encuentran aplicación a la hora de probar distintos resultados de la teoría analítica de números. Por ejemplo:

1. La irracionalidad de $\pi^2$.

2. La irracionalidad de $\zeta(3)$.

3. La Irracionalidad de ciertas extensiones de las series armónicas y del logaritmo de 2.

El siguiente lema caracteriza la irracionalidad de números reales.

**Lema 5.1** *Sea $x$ un número real. Si existen sucesiones de enteros $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ tales que*

*1.* $q_n x - p_n \neq 0$, *para cada* $n$,

*2.* $\lim\limits_{n\to\infty} q_n x - p_n = 0$,

*entonces $x$ es irracional.*

**Demostración:** Supongamos que $x$ es racional, entonces $x = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, y

$$q_n x - p_n = \frac{1}{q}\left[pq_n - qp_n\right].$$

Sin embargo, $pq_n - qp_n$ es un entero y por la suposición 1 no es cero, así $|pq_n - qp_n| \geq 1$. Luego, $|q_n x - p_n| \geq 1 \geq 1/|q|$, y esto nos conduce a que la suposición 2 no es posible. Así, la contradicción implica que $x$ no puede ser racional. $\square$

Además, si $|x - p_n/q_n| = \mathcal{O}(1/q_n^{s+1})$ con $0 < s < 1$ y $q_n < q_{n+1} < q_n^{1+o(1)}$, entonces la medida de la irracionalidad $r(x)$ o número de Liouville-Roth

$$r(x) = \text{ínf}\left\{ r \in \mathbb{R} : \left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^r} \text{ tiene un número finito de soluciones enteras en } (a,b) \right\}$$

verifica que $1 + s < r(x) < 1 + 1/s$ (véase [30], ejercicio 3 en pág. 376).
Observe que el lema 5.1 implica que los números irracionales pueden aproximarse mediante números racionales $p_n/q_n$ tanto como queramos. Para ciertos números reales tales como $\pi^2$, y $\zeta(3)$ usaremos resultados de la teoría de aproximación racional para construir explícitamente los enteros $p_n$ y $q_n$.
Por último, destacar que para el cálculo de ciertos límites se empleará el Teorema de los Números primos en dos de sus versiones más conocidas:

1.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1,$$
donde $\pi(x)$ es el número de primos menores o iguales a $x \in \mathbb{R}$.

2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1,$$
donde $p_n$ indica el enésimo primo.

La prueba de este teorema puede encontrarse en [41].

## 5.2. La irracionalidad de $\pi^2$ y $\zeta(3)$

5.2.1Aquí constataremos cómo la aproximación de Hermite-Padé puede emplearse para probar la irracionalidad de los números $\pi^2$ y $\zeta(3)$. En esta primera parte utilizaremos los polinomios clásicos de Legendre. Estos polinomios son un caso límite de los $q$-polinomios pequeños de Legendre, más concretamente

$$\lim_{q \to 1^-} P_n(x|q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} (-x)^k = P_n(x).$$

Por tanto de las propiedades y expresiones dadas en el capítulo 2, podemos obtener mucha de la información necesaria para tratar estos polinomios.

### 5.2.1. La irracionalidad de $\pi^2$

La irracionalidad de $\pi$ fue probada por Lambert en 1761. Posteriormente, Legendre probó en *Elements de Géometrie* (1794) que $\pi^2$ es irracional. La siguiente prueba es una combinación de las ideas de Beukers, Borwein, Erdélyi (véase [22], [31] y [32, Apéndice A2]).

**Teorema 5.2 (Legendre)** *El número real* $\pi^2/6$ *es irracional.*

**Prueba:** Consideremos las siguientes funciones de tipo Markov siguientes

$$f_1(z) = \int_0^1 \frac{dx}{z-x}, \qquad f_2(z) = -\int_0^1 \log x \frac{dx}{z-x}.$$

Los momentos asociados a las correspondientes medidas son

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}, \qquad -\int_0^1 x^k \log x dx = \frac{1}{(k+1)^2}, \quad k = 0, 1, 3, \ldots$$

Por tanto, se tienen los desarrollos

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{1}{z^{k+1}}, \quad f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \frac{1}{z^{k+1}}.$$

A continuación planteamos el siguente problema:
Aproximar simultáneamente las funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ tal que

$$A_n(z) - B_n(z) \log(z) = O((1-z)^{n+1}), \quad z \to 1, \tag{49}$$

$$A_n(z) f_1(z) + B_n(z) f_2(z) - C_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty, \tag{50}$$

donde $A_n$, $B_n$ y $C_n$ son polinomios de grado a lo más $n$.
Obsérvese que (50) es un problema de aproximación de tipo I para el vector $(f_1, f_2)$, que forma un AT-sistema. Por otra parte, (49) es un problema de aproximación de Padé para la función logaritmo. Las dos ecuaciones juntas, requieren polinomios comunes $A_n$, $B_n$, por

tanto es también un problema de aproximación de tipo II. Así, tenemos una combinación de problemas de aproximación de tipo I y II. Consideremos la función

$$F_n(x) = A_n(x) - B_n(x)\log x.$$

El espacio vectorial generado por las funciones

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \log x, x\log x, x^2\log x, \ldots, x^n\log x\}$$

sobre el intervalo $[0,1]$ es un sistema de Chebyshev de orden $2n+1$, y además, un subespacio de $C[0,1]$ de dimensión $2n+2$. En efecto, $F_n$ pertenece a este espacio, en consecuencia, $F_n$ tiene a lo más $2n+1$ ceros sobre $[0,1]$. La condición (49) exige que haya un cero de multiplicidad al menos $n+1$ en el punto 1, así $F_n^{(k)}(1) = 0$, para $k = 0, 1, \ldots, n$. Por integración reiterada, se tiene que

$$F_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_x^1 (t-x)^n F_n^{(n+1)}(t)dt.$$

Para $F_n^{(n+1)}$ el polinomio $A_n$ desaparece y aplicando la regla de Leibnitz se tiene

$$F_n^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_n^{(k)}(x)\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n+1-k}}.$$

Así, $F_n^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x}D_n\left(\frac{1}{x}\right)$, con $D_n$ un polinomio de grado a lo más $n$. La solución general de (49) puede escribirse como

$$F_n(x) = \int_x^1 (t-x)^n D_n(1/t)\frac{dt}{t}.$$

Si denotamos mediante $E_n(x)$ al polinomio recíproco $x^n D_n(1/x)$, entonces

$$F_n(x) = \int_x^1 (1-x/t)^n E_n(t)\frac{dt}{t}. \tag{51}$$

El próximo paso es determinar los polinomios $E_n$ a partir de la expresión (50). Recordemos que estamos en presencia de un problema de aproximación de tipo I para un AT-sistema, luego se verifican las condiciones de ortogonalidad (42)

$$\int_0^1 [A_n(x) - B_n(x)\log x]x^k dx = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

lo que implica que $F_n$ es ortogonal a todos los polinomios de grado a lo más $n-1$. Usando la expresión (51) obtenemos

$$\int_0^1 x^k \int_x^1 (1-x/t)^n E_n(t)\frac{dt}{t}dx = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Intercambiando el orden de integración se tiene

$$\int_0^1 E_n(t)\int_0^t (1-x/t)^n x^k dx \frac{dt}{t} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Efectuando el cambio de variables $x = ty$, se obtiene

$$\int_0^1 E_n(t) t^k dt \int_0^1 (1-y)^n y^k dy = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

De donde se deduce que $E_n$ es un polinomio ortogonal a todo polinomio de grado a lo más $n-1$ sobre el intervalo $[0,1]$ respecto a la medida de Lebesgue. Por tanto[3], $E_n$ es el *polinomio de Legendre*, esto es,

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}(-1)^k x^k. \tag{52}$$

Si Sustituimos la expresión (52) en (51) obtenemos

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}(-1)^k \int_1^x (1-x/t)^n t^{k-1} dt.$$

Aplicando el Teorema del binomio al término $(1-x/t)^n$ deducimos que

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\binom{n}{j}(-1)^{k+j} x^j \int_1^x t^{k-j-1} dt.$$

Nótese que

$$\int_x^1 t^{k-j-1} dt = \begin{cases} -\log x & \text{si } k = j, \\[2ex] \dfrac{1-x^{k-j}}{k-j} & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Luego

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}^2 x^k, \tag{53}$$

y

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\binom{n}{j}(-1)^{k+j} x^j \frac{x^j - x^k}{k-j}. \tag{54}$$

Por otra parte, considerando que

$$f_2(1) = -\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

[3]Se tiene por definición de polinomio ortogonal.

debemos sustituir $z = 1$ en (50). Sin embargo esta ecuación también contiene la función $f_1(z)$, que diverge para $z = 1$. Esta patología desaparece al observar que $A_n(1) = 0$, ya que $A_n(z) = (z-1)\widehat{A}_{n-1}(z)$, con $\widehat{A}_{n-1}(z) \in \mathbb{P}_{n-1}[z]$, y por tanto

$$\lim_{z\to 1} A_n(z) f_1(z) = \widehat{A}_{n-1}(1) \lim_{z\to 1}(1-z)\log\left(1-\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Luego el problema de aproximación está correctamente planteado puesto que la primera función de tipo Markov no origina problemas al sustituir $z = 1$ a fin de aproximar el número $\frac{\pi^2}{6}$. El residuo de la aproximación en (50) viene dado explícitamente por

$$A_n(z)f_1(z) + B_n(z)f_2(z) - C_n(z) = \int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{z-x}dx,$$

siendo

$$C_n(z) = \int_0^1 \left(\frac{A_n(z)-A_n(x)}{z-x} - \frac{B_n(z)-B_n(x)}{z-x}\log x\right)dx.$$

Así, al sustituir en (50) $z = 1$ se obtiene

$$B_n(1)\frac{\pi^2}{6} - C_n(1) = \int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{1-x}dx,$$

donde

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}^2,$$

es un número entero. Para determinar $C_n(1)$ necesitamos, por un lado

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{B_n(1)-B_n(x)}{1-x}\log x dx &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}^2 \int_0^1 \frac{1-x^k}{1-x}\log x dx \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}^2 \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(j+1)^2},\end{aligned}$$

y, por otro,

$$\int_0^1 \frac{A_n(x)}{1-x}dx = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\binom{n}{j}(-1)^{k+j}\frac{1}{k-j}\int_0^1 \frac{x^j-x^k}{1-x}dx,$$

siendo

$$\int_0^1 \frac{x^j - x^k}{1-x}dx = H_k - H_j,$$

donde $H_n = \sum_{j=1}^n 1/j$ denota al número armónico. Así

$$C_n(1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(j+1)^2} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\binom{n}{j}(-1)^{k+j}\frac{H_k-H_j}{k-j}.$$

Obsérvese que $C_n(1)$ no es necesariamente un número entero, pero si que lo es la expresión $C_n(1)d_n^2$, donde $d_n$ es el mínimo común múltiplo de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Luego, si denotamos $q_n = d_n^2 B_n(1)$ y $p_n = d_n^2 C_n(1)$ se tiene que

$$q_n \frac{\pi^2}{6} - p_n = d_n^2 \int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x) \log x}{1 - x} dx. \tag{55}$$

Ahora, necesitamos estudiar la convergencia asintótica de la parte derecha de esta ecuación.

**Lema 5.3** *Sea $d_n$ el mínimo común múltiplo de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Entonces,*

$$\limsup_{n\to\infty} d_n^{1/n} \leq e.$$

**Demostración:** El mínimo común múltiplo de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ viene dado mediante la siguiente factorización

$$d_n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_{\pi(n)}^{s_{\pi(n)}},$$

siendo $\pi(n)$ es el número de primos menores o iguales que $n$, $p_1, p_2, \ldots, p_{\pi(n)}$ números primos y $s_k$ el mayor exponente de $p_k$ en la factorización de cada número $m \leq n$. En particular esto significa que $p_k^{s_k} \leq n$, luego $d_n \leq n^{\pi(n)}$. Así,

$$d_n^{1/n} \leq n^{\pi(n)/n} = e^{\pi(n) \log n/n}.$$

El Teorema de los números primos garantiza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1,$$

lo que implica que $\limsup_{n\to\infty} d_n^{1/n} \leq e$. □

Si utilizáramos la cota inferior $d_n \geq p_1 p_2 \cdots p_{\pi(n)}$ y el teorema de los números primos en la forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1,$$

se puede probar también que $\liminf_{n\to\infty} d_n^{1/n} \geq e$. Así $\lim_{n\to\infty} d_n^{1/n} = e$. Para nuestro propósito el lema 5.3 nos basta.

SI empleamos (51) el miembro derecha de (55) se transforma como sigue:

$$\int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x) \log x}{1 - x} dx = \int_0^1 \int_x^1 (1 - x/t)^n E_n(t) \frac{dt}{t} \frac{dx}{1 - x},$$

donde $E_n$ es el polinomio de Legendre. Intercambiando el orden de integración, obtenemos

$$\int_0^1 E_n(t) \int_0^t (1 - x/t)^n \frac{dx}{1 - x} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{E_n(t)(1 - y)^n}{1 - yt} dy dt,$$

donde hemos usado la sustitución $x = yt$. Empleando la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre, esto es,

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n(1-x)^n, \tag{56}$$

e integrando por partes $n$ veces, se tiene que

$$\int_0^1 \frac{A_n(x) - B_n(x)\log x}{1-x}dx = \int_0^1\int_0^1 \frac{y^n t^n(1-y)^n(1-t)^n}{(1-yt)^{n+1}}dydt.$$

Esta integral es positiva, así que $q_n\frac{\pi^2}{6} - p_n \geq 0$ para todo $n$. Además, un cálculo sencillo muestra que

$$\max_{0\leq y,t\leq 1} \frac{yt(1-y)(1-t)}{1-yt} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5,$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty}\left|q_n\frac{\pi^2}{6} - q_n\right|^{1/n} \leq e^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 = 0{,}66626... < 1,$$

esto es, $q_n\frac{\pi^2}{6} - p_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego, del lema 5.1 se deduce la irracionalidad de $\pi^2/6$. $\square$

### 5.2.2. La irracionalidad de $\zeta(3)$

Continuando en la misma dirección de la sección 5.2.1 mostraremos la irracionalidad de $\zeta(3)$ usando una aproximación de Hermite-Padé. La irracionalidad de $\zeta(3)$ fue demostrada por R. Apery en 1977 (su prueba fue presentada en [10]) posteriormente Beukers [22] indicó que la prueba de Apery consistía en ciertas aproximaciones de Hermite-Padé.

**Teorema 5.4 (Apery)** *El número real $\zeta(3)$ es irracional.*

**Prueba:** Consideremos las funciones de tipo Markov (transformadas de Cauchy)

$$f_1(z) = \int_0^1 \frac{dx}{z-x}, \quad f_2(z) = -\int_0^1 \log x \frac{dx}{z-x}, \quad f_3(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 \log^2 x \frac{dx}{z-x}.$$

Los momentos asociadas a las correspondientes medidas son:

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}, \quad -\int_0^1 x^k \log x dx = \frac{1}{(k+1)^2}, \quad \frac{1}{2}\int_0^1 x^k \log^2 x dx = \frac{1}{(k+1)^3}.$$

Nótese que $f_3(1) = \zeta(3)$. Además, $(f_1, f_2, f_3)$ es un AT-sistema. El problema de aproximación simultanea que planteamos es el siguiente:

$$\begin{aligned} A_n(z) &= O(z-1), \qquad z \to 1, &(57)\\ A_n(z)f_1(z) + B_n(z)f_2(z) - C_n(z) &= O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \qquad z \to \infty, &(58)\\ A_n(z)f_2(z) + 2B_n(z)f_3(z) - D_n(z) &= O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \qquad z \to \infty, &(59)\end{aligned}$$

donde $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$ son polinomios de grado a lo más $n$. La ecuación (57) significa que $A_n(1) = 0$, o equivalentemente $A_n$ tiene un cero en 1. Esta condición se necesita para garantizar que $A_n(z)f_2(z)$ se anula en $z = 1$. Tomando $z = 1$ en (59) se tiene $2B_n(1)\zeta(3) - D_n(1)$ en el miembro izquierdo. Investigaremos el comportamiento asintótico del residuo de esta aproximación. Nótese que tanto (58) como (59) son un problema de aproximación de tipo I, para los sistemas $(f_1, f_2)$ y $(f_2, f_3)$, respectivamente. Estos dos problemas combinados forman un problema de aproximación de tipo II con denominador común, esto es, el par $(A_n, B_n)$.

Las condiciones de ortogonalidad de estos problemas de aproximación de tipo I son

$$\begin{aligned} \int_0^1 [A_n(x) - B_n(x)\log x]x^k dx &= 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, &(60)\\ \int_0^1 [A_n(x) - B_n(x)\log x]x^k \log x dx &= 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. &(61)\end{aligned}$$

Sea

$$F_n(x) = A_n(x) - B_n(x)\log x = \int_x^1 E_n(x/t)E_n(t)\frac{dt}{t}, \tag{62}$$

donde $E_n$ denota los polinomios de Legendre (52). Además, $F_n(x)$ es una función sobre el espacio vectorial generado por

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \log x, x \log x, x^2 \log x, \ldots, x^n \log x\},$$

la cual se anula en $x = 1$. Si intercambiamos el orden de integración al sustituir (62) en (60) se tiene que

$$\int_0^1 x^k \int_x^1 E_n(x/t) E_n(t) \frac{dt}{t} dx = \int_0^1 E_n(t) \int_0^t E_n(x/t) x^k dx \frac{dt}{t}.$$

Ahora, sustituimos $x = yt$ y obtenemos

$$\int_0^1 F_n(x) x^k dx = \int_0^1 E_n(t) t^k dt \int_0^1 E_n(y) y^k dy,$$

que se anula para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, al considerar la ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Esto nos asegura (60). Análogamente,

$$\int_0^1 x^k \log x \int_x^1 E_n(x/t) E_n(t) \frac{dt}{t} dx = \int_0^1 E_n(t) \int_0^t E_n(x/t) x^k \log x dx \frac{dt}{t}.$$

El cambio de variables $x = yt$ garantiza que

$$\int_0^1 F_n(x) x^k \log x dx = \int_0^1 E_n(t) t^k \int_0^1 E_n(y) y^k (\log y + \log t) dy dt.$$

Como la integral doble es simétrica en $y$ y $t$ tenemos

$$\int_0^1 F_n(x) x^k \log x dx = 2 \int_0^1 E_n(t) t^k \log t dt \int_0^1 E_n(y) y^k dy.$$

Nuevamente para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ se anula el miembro derecho al considerar la ortogonalidad de los polinomios de Legendre. Luego, podemos dar una fórmula explícita para $F_n(x)$. Usando la expansión explícita de los polinomios de Legendre $E_n$, se tiene que

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n+k}{k} \binom{n+j}{j} (-1)^{k+j} x^k \int_1^x t^{j-k-1} dt.$$

Por tanto, cuando $k = j$, obtenemos

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 x^k. \tag{63}$$

Por otra parte,

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n+k}{k} \binom{n+j}{j} (-1)^{k+j} \frac{x^k - x^j}{j-k}. \tag{64}$$

Obviamente $B_n(1)$ es un número entero. Sin embargo, necesitamos conocer $D_n(1)$ para aproximar $\zeta(3)$. Ahora bien, si consideramos

$$D_n(z) = -\int_0^1 \frac{A_n(z)-A_n(x)}{z-x}\log x dx + \int_0^1 \frac{B_n(z)-B_n(x)}{z-x}\log^2 x dx,$$

dado que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{B_n(z)-B_n(x)}{z-x}\log^2 x dx &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\int_0^1\frac{1-x^k}{1-x}\log^2 x dx\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{2}{(j+1)^3},\end{aligned}$$

y

$$\int_0^1 \frac{A_n(x)}{1-x}\log x dx = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n+k}{k}\binom{n+j}{j}\frac{(-1)^{k+j}}{j-k}\int_0^1\frac{x^k-x^j}{1-x}\log x dx,$$

podemos determinar $Dn(1)$.
Nótese que

$$\int_0^1 \frac{x^k-x^j}{1-x}\log x dx = H_k^{(2)} - H_j^{(2)},$$

donde $H_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} 1/j^2$ denota el número armónico de orden 2.
Así

$$\begin{aligned}D_n(1) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{2}{(j+1)^2}\\ &\quad+\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}\binom{n+k}{k}\binom{n+j}{j}(-1)^{k+j}\frac{H_k^{(2)}-H_j^{(2)}}{j-k}.\end{aligned}$$

Obsérvese que $D_n(1)$ no es necesariamente un entero, pero que si lo es $d_n^3 D_n(1)$, donde $d_n$ es el mínimo común múltiplo de 2, 3, $\ldots, n$. Por tanto, si $q_n = 2d_n^3 B_n(1)$ y $p_n = d_n^3 D_n(1)$, tenemos

$$q_n\zeta(3) - p_n = d_n^3\int_0^1 \frac{A_n(s)-B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds.$$

A continuación probemos que el miembro derecho tiende a cero para $n \to \infty$.
En efecto,

$$A_n(s) - B_n(s)\log s = \int_1^s E_n(s/y)E_n(y)\frac{dy}{y},$$

donde $E_n$ son los polinomios de Legendre de grado $n$ en $[0,1]$. Si cambiamos el orden de integración, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{A_n(s)-B_n(s)\log s}{1-s}\log s ds &= \int_0^1\int_0^t \frac{\log s}{1-s}E_n(s/y)E_n(y)ds\frac{dy}{y}\\ &= \int_0^1\int_0^1\frac{\log xy}{1-xy}E_n(x)E_n(y)dxdy,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene después de sustitucir $s = xy$. Ahora, usamos

$$\int_0^1 \frac{dv}{1-(1-u)v} = -\frac{\log u}{1-u},$$

de donde

$$\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s} \log s ds = -\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{E_n(x)E_n(y)}{1-(1-xy)v} dxdydv.$$

Empleando la fórmula de Rodrigues (56) e integrando por partes encontramos que

$$\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s} \log s ds = -\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n v^n E_n(y)}{[1-(1-xy)v]^{n+1}} dxdydv.$$

Para estimar la integral sobre $v \in [0,1]$, usamos el cambio de variables

$$z = \frac{1-v}{1-(1-xy)v},$$

esto es,

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n v^n E_n(y)}{[1-(1-xy)v]^{n+1}} dxdydv = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-z)^n E_n(y)}{1-(1-xy)z} dxdydz.$$

Usando la fórmula de Rodrigues e integrando por partes se tiene que

$$\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s} \log s ds = -\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{[xyz(1-x)(1-y)(1-z)]^n}{[1-(1-xy)z]^{n+1}} dxdydz.$$

Un ejercicio de cálculo extremal nos conduce a que

$$\max_{0 \le x,y,z \le 1} \frac{xyz(1-x)(1-y)(1-z)}{1-(1-xy)z} = (\sqrt{2}-1)^4.$$

Luego

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s} \log s ds\right| &\le (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} dxdydz \\ &= (\sqrt{2}-1)^{4n} 2\zeta(3).\end{aligned}$$

Así,

$$\limsup_{n\to\infty} |q_n\zeta(3) - p_n|^{1/n} \limsup_{n\to\infty} d_n^{3/n} \left|\int_0^1 \frac{A_n(s) - B_n(s)\log s}{1-s} \log s ds\right|^{1/n} \le e^3(\sqrt{2}-1)^4.$$

Observe que

$$e^3(\sqrt{2}-1)^4 = 0{,}591263\ldots < 1,$$

por tanto se tiene que $\zeta(3)$ es irracional usando el lema 5.1. $\square$

## 5.3. La irracionalidad de $h_p(1)$ y $\ln_p(2)$

Muchas de las funciones especiales y en particular las funciones hipergeométricas, tienen $q$-extensiones, obtenidas generalmente al sustituir los símbolos de Pochhammer $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ por sus $q$-análogos $(a;q)_n = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{n-1})$. Además,

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{(q^a;q)_n}{(1-q)^n} = (a)_n.$$

Así, se recupera la función especial original a partir de su $q$-extensión haciendo tender $q \to 1^-$. Nuestro interés en este apartado es la $q$-extensión de la serie armónica

$$h_p(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^k}, \quad 0 < q = \frac{1}{p} < 1, \tag{65}$$

asi como del logaritmo natural de 2

$$\ln_p(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-q)^k}{1-q^k}, \qquad 0 < q = \frac{1}{p} < 1. \tag{66}$$

En 1948, Paul Erdös [35] probó que $h_2(1)$ era irracional. Peter Browein [28], [29] indicó que $h_p(1)$ era irracional para cada entero $p > 1$, además demostró la irracionalidad de $\ln_p(2)$ para cada entero $p > 1$. Las técnicas empleadas en estos resultados pasan por la aproximación de Padé y el análisis complejo a fin de obtener una buena aproximación racional de $h_p(1)$ y $\ln_p(2)$.
Recientemente, Amdeberhan y Zeilberger [8] encontraron sucesiones de números enteros ($q$-WZ pares) para aproximar racionalmente $h_p(1)$ y $\ln(2)$, mejorando la cota superior de la medida de irracionalidad a 4.8=24/5. Aquí veremos que estas aproximaciones racionales están relacionadas con los $q$-polinomios pequeños de Legendre y por lo que trabajaremos con aproximaciones de Padé. Utilizaremos algunos resultados de los $q$-polinomios pequeños de Legendre para probar la irracionalidad, pero con una mejor cota para la medida de irracionalidad de $h_p(1)$. La conexión con los $q$-polinomios pequeños de Legendre abren un camino para probar la irracionalidad de $q$-extensiones de $\zeta(2)$ y $\zeta(3)$ en el espíritu de Apery [10], usando $q$-polinomios ortogonales múltiples [66].

### 5.3.1. Las series $q$-armónicas

Supongamos que $\mu$ es una medida positiva sobre la recta real con soporte infinito y para la cual existen todos sus momentos. Si $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ es la familia de polinomios ortogonales respecto a $\mu$, esto es

$$\int P_n(x)P_m(x)d\mu(x) = 0, \qquad m \neq n,$$

y $Q_n$ el polinomio tiene grado $n-1$ dado por

$$Q_n(z) = \int \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z-x} d\mu(x), \tag{67}$$

entonces, como ya hemos estudiado en el capítulo 3 se tiene para $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ la siguiente aproximación

$$P_n(z)f(z) - Q_n(z) = \int \frac{P_n(x)}{z-x} d\mu(x), \qquad z \notin \operatorname{sop}(\mu). \tag{68}$$

Si desarrollamos $1/(z-x)$ como

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{z^{k+1}} + \frac{x^n}{z^n}\frac{1}{z-x},$$

entonces, de la ortogonalidad de $P_n$ se tiene que

$$P_n(z)f(z) - Q_n(z) = \frac{1}{z^n}\int \frac{P_n(x)x^n}{z-x} d\mu(x) = \mathcal{O}(1/z^{n+1}).$$

Esta expresión es la forma linealizada de las condiciones de interpolación en torno a $z = \infty$ para la aproximación de Padé, luego que $Q_n(z)/P_n(z)$ es la $\left[\frac{n-1}{n}\right]$ aproximación de Padé para $f(z)$ entorno de $z = \infty$.
Para los $q$-polinomios pequeños de Legendre la medida $\mu$ tiene como soporte

$$\{q^k, k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad \text{con} \quad 0 < q < 1.$$

Así, sop $\mu$ es un conjunto acotado en $[0, 1]$ con 0 como punto de acumulación. La medida viene dada por

$$\int g(x) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g(q^k) q^k.$$

La función de Stieltjes para esta medida es

$$f(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{z-q^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{zp^k - 1}, \quad z \notin \operatorname{sop}(\mu), \quad p = \frac{1}{q}. \tag{69}$$

Si evaluamos esta función en $p^n$, tenemos

$$f(p^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n+k} - 1} = h_p(1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p^k - 1}. \tag{70}$$

Por tanto, si $p$ es un número entero mayor que 1, $f(p^n)$ nos conduce a $h_p(1)$ más un número racional $-\sum_{k=1}^{n-1} 1/(p^k - 1)$.
Ahora usamos (68) para los $q$-polinomios pequeños de Legendre en $z = p^n$, obteniendo

$$P_n(p^n|q)\left(h_p(1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p^k - 1}\right) - Q_n(p^n|q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q)}{p^n - q^k} q^k. \tag{71}$$

Nótese que (17) nos proporciona la siguiente expresión

$$P_n(p^n|q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ n \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{k(k-1)/2}. \tag{72}$$

la cual está próxima al término $b_n$ obtenido en [8, pág. 277]. De hecho, el $b_n$ allí obtenido corresponde a $P_n(p^{n+1}|q)$. Observesé que la construcción de Borwein (Lema 2 de [32]), utiliza $P_{n-1}(cp^{n+1}|q)$. Además, los números $q$-binómicos $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p$, son polinomios en $p$ con coeficientes enteros, esto nos conduce de manera sencilla a la $q$-versión de las identidades del triángulo de Pascal

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_p + p^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_p + p^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_p .$$

Por tanto si $p > 1$, $p \in \mathbb{Z}$, luego $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p$ y $\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p$ son enteros. Esto implica que (72), esto es $P_n(p^n, q)$ es un entero. Además, como $p^n > 1$ y todos los ceros de $P_n(x|q)$ están en $[0, 1]$, podemos concluir que $(-1)^n P_n(p^n|q)$ es positivo para todo $n$.
Otro término importante en (71) es $Q_n(p^n|q)$, que puede calcularse explícitamente usando (67)

$$Q_n(x|q) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_n(x|q) - P_n(q^j|q)}{x - q^j} q^j .$$

Empleando las propiedades de los $q$-polinomios pequeños de Legendre podemos escribir

$$Q_n(x|q) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(qx; q)_k - (q^{j+1}; q)_k}{x - q^j} q^j .$$

Ahora, de la siguiente igualdad

$$\frac{(qx; q)_k - (qy; q)_k}{x - y} = - \sum_{\ell=1}^{k} q^{\ell} (qy; q)_{\ell-1} (q^{\ell+1} x; q)_{k-\ell},$$

que se puede probar por inducción, obtenemos que

$$\begin{aligned} Q_n(x|q) &= (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2} \\ &\quad \times \sum_{\ell=1}^{k} q^{\ell} (q^{\ell+1} x; q)_{k-\ell} \sum_{j=0}^{\infty} q^j (q^{j+1}; q)_{\ell-1} \end{aligned}$$

Por otra parte, de las propiedades de las series $q$-binomiales tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} q^j (q^{j+1}; q)_{\ell-1} &= (q; q)_{\ell-1} \sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{(q^{\ell}; q)_j}{(q; q)_j} \\ &= \frac{(q; q)_{\ell-1} (q^{\ell+1}; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} \\ &= \frac{1}{1 - q^{\ell}} \end{aligned}$$

Así,

$$Q_n(x|q) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(q^{\ell+1}x;q)_{k-\ell}}{p^\ell - 1}. \qquad (73)$$

Evaluándo $x = p^n$ y utilizando que

$$(q^{\ell+1}p^n;q)_{k-\ell} = (p^{n-k};p)_{k-\ell},$$

obtenemos

$$Q_n(p^n|q) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(p^{n-k};p)_{k-\ell}}{p^\ell - 1}. \qquad (74)$$

Todos los términos del miembro derecho son enteros, excepto los que tienen como denominador $p^\ell - 1$. Para obtener un entero, necesitaremos multiplicar por un múltiplo de $p^\ell - 1$, con $\ell = 1, 2, \ldots, n$. La elección óptima debería ser el mínimo común múltiplo de tales números

$$d_p(n) = mcm(p-1, p^2-1, p^3-1, \ldots, p^n-1), \qquad (75)$$

pero desafortunadamente no se sabe mucho sobre esta cantidad. Otra posibilidad es tomar $(-1)^n(p,p)_n$, sin embargo este número es demasiado grande; de hecho crece como $p^{n(n+1)/2}$, cuando $n \to \infty$. Un factor útil es

$$\hat{d}_p(n) = \prod_{k=[n/2]+1}^{n} (p^k - 1) = \frac{(-1)^n(p,p)_n}{(-1)^{[n/2]}(p,p)_{[n/2]}} = (-1)^{n-[n/2]} \begin{bmatrix} n \\ [n/2] \end{bmatrix}_p (p;p)_{[(n+1)/2]}, \qquad (76)$$

donde $[n/2]$ es la parte entera de $n/2$. En efecto, si $k > [n/2]$, entonces $p^k - 1$ está en el producto definido midiante $\hat{d}_p(n)$ y, por tanto, es un divisor. Si $k \leq [n/2]$, entonces $p^k - 1$ divide a $(p;p)_{[(n+1)/2]}$ y, por tanto, también divide a $\hat{d}_p(n)$ ya que el coeficiente $q$-binomial es un entero. Nótese que $\hat{d}_p(n)$ crece como $p^{3n^2/8}$ cuando $n \to \infty$.
Así, encontramos que los números

$$b_n = \hat{d}_p(n) P_n(p^n|q), \qquad (77)$$

$$a_n = \hat{d}_p(n) Q_n(p^n|q) + b_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p^k - 1}, \qquad (78)$$

son enteros, de modo que planteamos la siguiente igualdad

$$b_n h_p(1) - a_n = \hat{d}_p(n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q)}{p^n - q^k} q^k. \qquad (79)$$

Ahora,debemos probar que $b_n h_p(1) - a_n \neq 0$, para todo $n$, y

$$\lim_{n\to\infty} b_n h_p(1) - a_n = 0.$$

Luego, el lema 5.1 garantiza la irracionalidad de $h_p(1)$. Notemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q)}{p^n - q^k} q^k = \frac{1}{P_n(p^n|q)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q) P_n(p^n|q)}{p^n - q^k} q^k.$$

Si sumamos y restamos $P_n(q^k|q)$ en el sumatorio del miembro derecho de la igualdad, tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q)}{p^n - q^k} q^k = \frac{1}{P_n(p^n|q)} \sum_{k=0}^{\infty} P_n(q^k|q) \frac{P_n(p^n|q) - P_n(q^k|q)}{p^n - q^k} q^k + \frac{1}{P_n(p^n|q)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n^2(q^k|q)}{p^n - q^k} q^k.$$

Así, el primer sumatorio de la derecha se anula debido a la ortogonalidad, luego

$$b_n h_p(1) - a_n = \frac{\hat{d}_p(n)}{P_n(p^n|q)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_n^2(q^k|q)}{p^n - q^k} q^k. \tag{80}$$

Todos los términos en el sumatorio son ahora positivos, y $(-1)P_n(p^n|q)$ es positivo para todo $n$, así podemos concluir que

$$(-1)^n (b_n h_p(1) - a_n) > 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Veamos ahora que esta cantidad tiende a cero cuando $n \to \infty$. Claramente $p^n - 1 \leq p^n - q^k \leq p^n$ así que

$$\frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^{\infty} P_n^2(q^k|q) q^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n^2(q^k|q)}{p^n - q^k} q^k \leq \frac{1}{p^n - 1} \sum_{k=0}^{\infty} P_n^2(q^k|q) q^k.$$

Ahora, utilizando la norma del $q$-polinomio pequeño de Legendre (16) se tiene

$$\frac{p}{p^{2n+1} - 1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n^2(q^k|q)}{p^n - q^k} q^k \leq \frac{p^{n+1}}{(p^n - 1)(p^{2n+1} - 1)}. \tag{81}$$

Nos resta demostra el comportamiento asintótico de $P_n(p^n|q)$, cuando $n \to \infty$. Para ello podemos emplear un resultado general para secuencias de polinomios con ceros uniformemente acotados.

**Lema 5.5** *Supongamos que $P_n$ es una secuencia de polinomios mónicos de grado $n$ y que los ceros $x_{j,n}$ $(1 \leq j \leq n)$ de $P_n$ son tales que $|x_{j,n}| \leq M$, con $M$ independiente de $n$. Entonces se tiene que para $|x| > 1$ y cada $c \in \mathbb{C}$*

$$\lim_{n \to \infty} |P_n(cx^n)|^{1/n^2} = |x|. \tag{82}$$

**Demostración:** El módulo de la factorización del polinomio $P_n$ viene dada por

$$|P_n(x)| = \prod_{j=1}^{n} |x - x_{j,n}|.$$

además,

$$||x| - M| \leq |x - x_{j,n}| \leq |x| + M,$$

por tanto,

$$||cx^n| - M|^n \leq |P_n(cx^n)| \leq (|cx^n| + M)^n.$$

Para $n$ suficientemente grande se tiene que

$$|x| \left(|c| - \frac{M}{|x|^n}\right)^{1/n} \leq |P_n(cx^n)|^{1/n^2} \leq |x| \left(|c| + \frac{M}{|x|^n}\right)^{1/n}.$$

lo que demuestra el resultado. $\square$

Obsérvese que podríamos permitir que $M$ creciese, con $n$, exponencialmente. Los $q$-polinomios pequeños de Legendre, tienen sus ceros están en $[0, 1]$ así que podemos usar el lemma para $M = 1$. El coeficiente principal $\kappa_n$ de $P_n(x|q)$ es, por (17), igual a $\kappa_n = (-1)^n \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_p p^{-n(n+1)/2}$, deduciendo que

$$\lim_{n\to\infty} |\kappa_n|^{1/n^2} = \sqrt{p}.$$

Por lo tanto, el lema 5.5 nos garantiza que si $|x| > 1$ y $c \in \mathbb{C}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} |P_n(cx^n|q)|^{1/n^2} = \sqrt{p}\ |x|. \tag{83}$$

**Teorema 5.6** *Supongamos que $p > 1$ es un entero. Sean $a_n$ y $b_n$ como en (77)-(78), entonces $a_n \in \mathbb{Z}$, $(-1)^n b_n \in \mathbb{N}$, y $(-1)^n(b_n h_p(1) - a_n) > 0$ para $n > 1$. Además*

$$\lim_{n\to\infty} |b_n h_p(1) - a_n|^{1/n^2} = p^{-9/8} < 1,$$

*lo cual implica que $h_p(1)$ es irracional con medida de irracionalidad $r$ tal que $1{,}6 \leq r \leq 2{,}666\ldots$.*

**Demostración:** Si tomamos $x = p$ y $c = 1$ en (83), entonces

$$\lim_{n\to\infty} |P_n(p^n|q)|^{1/n^2} = p^{3/2}.$$

Luego, para el entero $b_n$ de (77) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{1/n^2} = p^{15/8}.$$

Obsérvese que $b_n$ tiene el mismo signo que $P_n(p^n|q)$, esto es, $(-1)^n$. Además, (80) y (81) nos muestran que

$$\lim_{n\to\infty} |b_n h_p(1) - a_n|^{1/n^2} = \frac{\lim_{n\to\infty} \hat{d}_p(n)^{1/n^2}}{\lim_{n\to\infty} |P_n(p^n|q)|^{1/n^2}} = p^{-9/8}.$$

La irracionalidad ahora se tiene por en virtud del lema 5.1. Nótese que la igualdad anterior aporta una aproximación por racionales $a_n/b_n$ de $h_p(1)$ satisfaciendo

$$\left| h_p(1) - \frac{a_n}{b_n} \right| = \mathcal{O}\left( \frac{1}{b_n p^{(9/8-\epsilon)n^2}} \right),$$

para cada $\epsilon > 0$. Ahora, $b_n = p^{n^2/8+o(n^2)}$,

$$\left| h_p(1) - \frac{a_n}{b_n} \right| = \mathcal{O}\left( \frac{1}{b_n^{1+3/5-\epsilon}} \right), \qquad \forall \epsilon > 0,$$

lo cual nos proporciona cotas para la medida de la irracionalidad, por ejemplo, $1 + 3/5 \leq r \leq 1 + 5/3$. □

La cota superior para la medida de irracionalidad es mejor que la dada en [8] (4.8). Una mejora se consigue reemplazando $\hat{d}_p(n)$ por $d_p(n)$ según (75), pero entonces se necesita conocer una cota superior para $\limsup_{n\to\infty} d_p(n)^{1/n^2}$. Claramente,

$$\limsup_{n\to\infty} d_p(n)^{1/n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \hat{d}_p(n)^{1/n^2} = p^{3/8}.$$

Sin embargo, es posible que $\limsup_{n\to\infty} d_p(n)^{1/n^2} = p^c$ para cierto $c < 3/8$. Esto es un problema abierto de interés, que consiste en dado $p \to 1$ estudiar el comportamiento del mínimo común múltiplo $d_n$ de los enteros $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ para los que se tiene

$$\lim_{n\to\infty} d_n^{1/n} = e,$$

lo cual es equivalente al teorema de los números primos.

### 5.3.2. El $q$-análogo del logaritmo de 2

Ahora veremos que un análisis similar también prueba la irracionalidad de $\ln_p(2)$ para cada entero $p > 1$. A continuación, reescribiremos $\ln_p(2)$ usando series geométricas, esto es,

$$\ln_p(2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{q^k}{1-q^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^k \sum_{j=0}^{\infty} q^{jk}.$$

El teorema de Fubini nos permite cambiar el orden de los sumatorios siempre que $0 < q < 1$. Así

$$\begin{aligned} \ln_p(2) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^{k(j+1)} \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j+1}}{1+q^{j+1}} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k+1}. \end{aligned}$$

Por tanto, si podemos evaluar la función de Stieltjes (69) para $z = -p^n$, entonces tendremos que

$$f(-p^n) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n+k}+1} = \ln_p(2) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k+1}.$$

Así, $f(-p^n)$ nos conduce a $\ln_p(2)$ junto al número racional $\sum_{k=1}^{n-1} 1/(p^k+1)$. Deducimos como en la sección anterior y evaluamos (68) para los $q$-polinomios pequeños de Legendre en $z = -p^n$, esto es,

$$P_n(-p^n|q)\left(\ln_p(2) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k+1}\right) - Q_n(-p^n|q) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q)}{p^n+q^k} q^k.$$

Aquí podemos usar (17) para constatar que

$$P_n(-p^n|q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_p (-1)^k p^{(n-k)(n-k+1)/2} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{(-p^{n-k};p)_{k-\ell}}{p^\ell - 1}.$$

Así, $\hat{d}_p(n) Q_n(-p^n|q)$ es un número entero. Para que la cantidad adicional

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{p^k+1},$$

sea un entero debemos multiplicarla por un múltiplo de $p^k + 1$, con $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Usaremos $(-1)^n(-1;p)_n$, el cual crece como $p^{n^2/2}$. Así, si elegimos los enteros

$$b_n = (-1)^n(-1;p)_n \hat{d}_p(n) P_n(-p^n|q), \tag{35}$$

$$a_n = (-1)^n(-1;p)_n \hat{d}_p(n) Q_n(-p^n|q) - b_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{p^k+1}, \tag{36}$$

tenemos que

$$b_n \ln_p(2) - a_n = (-1)^n(-1;p)_n \hat{d}_p(n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q)}{-p^n - q^j} q^k. \tag{37}$$

**Teorema 5.7** *Supongamos que $p > 1$ es un entero. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ como los dados en (35)-(36), entonces $a_n \in \mathbb{Z}$, $b_n \in \mathbb{N}$, y $b_n \ln_p(2) - a_n < 0$. Además*

$$\lim_{n\to\infty} |b_n \ln_p(2) - a_n|^{1/n^2} = p^{-5/8} < 1.$$

*O sea, $\ln_p(2)$ es irracional y su medida de irracionalidad satisface*

$$1{,}263 \leq r(\ln_p(2)) \leq 4{,}8.$$

**Demostración:** Sustituyendo $c = 1$ y $x = p$ en (83), obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{1/n^2} = p^{19/8}.$$

Por otra parte, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n(q^k|q)}{-p^n - q^j} q^k = \frac{1}{P_n(-p^n|q)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_n^2(q^k|q)}{-p^n - q^j} q^k,$$

y $p^n \leq p^n + q^j \leq p^n + 1$, para cada $j$, que combinado con (37) implica

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n(-1;p)_n \hat{d}_p(n)}{P_n(-p^n|q)} \frac{p^{n+1}}{(p^n+1)(p^{2n+1}-1)} &\leq -(b_n \ln_p(2) - a_n) \\ &\leq \frac{(-1)^n(-1;p)_n \hat{d}_p(n)}{P_n(-p^n|q)} \frac{p}{p^{2n+1}-1}. \end{aligned}$$

Mediante las desigualdades anteriores podemos encontrar los comportamientos asintóticos necesiarios para obtener la irracionalidad. Obsérvese que $b_n = p^{19n^2/8+o(n^2)}$ y

$$\left| \ln_p(2) - \frac{a_n}{b_n} \right| = \mathcal{O}\left( \frac{1}{b_n^{1+5/19-\epsilon}} \right), \qquad \forall \epsilon > 0,$$

de donde deducimos las cotas para la medida de irracionalidad, esto es, $1 + 5/19 \leq r \leq 1 + 19/5$. □

La cota superior para la medida de irracionalidad es la misma que la obtenida en [8]. Ésta puede mejorarse reemplazando $(-1)^n(-1;p)_n$ por el mínimo común múltiplo de $p^k+1$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ y $\hat{d}_p(n)$ por el mínimo común múltiplo de $p^k - 1$, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Además, se puede encontrar el comportamiento asintótico de las raíz $n^2$-ésima de estas cantidades.

### 5.3.3. Mejora de medida de irracionalidad de $h_p(1)$ y $\ln_p(2)$

Esta apartado es una consecuencia del estudio de la denominada función de Euler y los polinomios ciclotómicos $\Phi_n(x)$, ya que gracias a estos se mejora substancialmente dichas cotas.

**Definición 5.1** *La* función de Euler *de un número natural $n$ se define como la cantidad de enteros positivos menores que $n$ que son primos con $n$, esto es,*

$$\varphi(n) := \{m \in \mathbb{Z} \,:\, 1 \leq m \leq n \text{ y } mcd(m,n) = 1\}.$$

Esta función posee varias propiedades que en manuales de álgebra conmutativa pueden encontrarse, por ejemplo, relaciona a dicha función con los polinomios ciclotómicos.

**Definición 5.2** *Dado un número natural $n$, se define el* polinomio ciclotómico $\Phi_n(x)$ *como*

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq m \leq n \\ mcd(m,n)=1}} \left( x - e^{\frac{2m\pi}{n}} \right)$$

De hecho, entre las propiedades que posee estos polinomios caben destacar las siguientes

1. $\Phi_n(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros.

2. $\Phi_n(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

3. El grado de $\Phi_n(x)$ es $\varphi(n)$.

4. $x^n - 1 = \prod_{t|n} \Phi_t(x)$.

Teniendo en cuenta estas propiedades es sencillo mostrar que para $p$ suficientemente grande

$$d_p(n) = mcm(p-1, p^2-1, \cdots, p^n-1) \leq \Phi_1(p) \cdot \Phi_2(p) \cdots \Phi_n(p) \approx p^{\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots\varphi(n)}.$$

**Lema 5.8** *(véase [40, pág 139] y [49])*

$$\sum_{m \leq n} \varphi(m) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \log n).$$

Empleando este lema se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} d_p^{1/n^2}(n) = \frac{3}{\pi^2}.$$

Por tanto, de esta expresión se deduce que para $h_p(1)$ se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{1/n^2} = p^{\frac{3}{2}+\frac{3}{\pi^2}} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |b_n h_p(1) - a_n|^{1/n^2} = p^{\frac{3}{\pi^2}-\frac{3}{2}}.$$

Luego,

$$1{,}663 \sim \frac{\pi^2}{\pi^2+2} \leq r(h_p(1)) \leq \frac{\pi^2}{\pi^2-2} \sim 2{,}508.$$

El caso $ln_p(2)$ es algo más complejo ya que debemos determinar

$$mcm(p+1, p^2+1, \ldots, p^n+1) \leq \Phi_2(x)\Phi_4(x)\cdots\Phi_{2n} \approx p^{\frac{4}{\pi^2}} \quad p \to \infty,$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{1/n^2} = p^{\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi^2}} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |b_n h_p(1) - a_n|^{1/n^2} = p^{\frac{6}{\pi^2}-\frac{3}{2}}.$$

Por tanto,

$$1{,}4232 \sim \frac{2}{\pi^2}\pi^2 + 4 \leq r(ln_p(2)) \leq \frac{2\pi^2}{\pi^2-4} \sim 3{,}363.$$

Nótese que ambas cotas mejoran sensiblemente las anteriores que estaban establecidas entre

$$1{,}6 \leq r(h_p(1)) \leq 2{,}6666 \quad \text{y} \quad 1{,}263 \leq r(ln_p(2)) \leq 4{,}8.$$

# 6. Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo se añade una lista de problemas abiertos que abordaremos próximamente como parte del proyecto de tesis doctoral.

1.) Determinar el álgebra dinámica correspondiente a los $q$-polinomios ortogonales de Askey-Wilson.

2.) Plantear un problema de aproximación de tipo II respecto a $q$-medidas dicretas, esto es, desarrollar las técnicas necesarias para estudiar las propiedades analíticas y algebraicas de los correspondientes $q$-polinomios multiortogonales.

3.) Determinar la correspondiente $q$-ecuación en diferencias que verifica cada una de las familias de $q$-polinomios multiortogonales.

4.) Estudiar el álgebra dinámica asociada a los $q$-polinomios multiortogonales.

5.) Definir una $q$-función análoga a la función Zeta de Riemann y emplear el problema abierto 2 para plantear un problema de aproximación de tipo I y de tipo II que guardando las pautas expuestas en la sección 5.2, aproxime a dicha $q$-función.

# Referencias


[1] R. Álvarez-Nodarse *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*. Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano" Vol **26** Prensa Universitaria de Zaragoza, Zaragoza, Spain

[2] R. Álvarez-Nodarse and J. Arvesú 1999 *On the q-polynomials on the exponential lattice* $x(s) = c_1 q^s + c_3$ Integral Trans. and Special Funct. **8** 299–324

[3] R. Álvarez-Nodarse N. M. Atakishiyev and R. S. Costas-Santos 2005 *Factorization of the hypergeometric-type difference equation on non-uniform lattices: dynamical algebra* J. Phys. A: Math. Gen. **38** No 1 153–174

[4] R. Álvarez-Nodarse and R. S. Costas-Santos 2001 *Factorization method for difference equations of hypergeometric-type on nonuniform lattices* J. Phys. A: Math. Gen. **34** No 21 5551–5569

[5] R. Álvarez-Nodarse and R. S. Costas-Santos 2004 *Factorization of the hypergeometric -type difference* Elect. Trans. on Num. Anal., aceptado

[6] R. Álvarez-Nodarse and J. C. Medem 2001 *The* $q-$*Classical polynomials and the* $q-$*Askey and Nikiforov-Uvarov* J. Comput. Appl. Math. 135 197–223

[7] R. Álvarez-Nodarse and Yu. F. Smirnov 1996 *q-Dual Hahn polynomials on the non-uniform lattice* $x(s) = [s]_q[s+1]_q$ *and the q-algebras* $SU_q(1,1)$ *and* $SU_q(2)$ J. Phys. A.: Math. Gen. **29** 1435–1451

[8] T. Amdeberhan, D. Zeilberger 1998 *q-Apéry irrationality proofs by q-WZ pairs* Adv. Appl. Math. **20** 275–283

[9] M. A. Angelesco 1919 *Sur deux extensions des fractions continues algébriques* C.R. Acad. Sci. Paris **18** 262–263

[10] R. Apéry 1979 *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$ Astérisque **61** 11–13

[11] R. Askey and S. K. Suslov 1993 *The q-harmonic oscillator and the Al-Salam and Carlitz polynomials* Lett. Math. Phys. **29** 123–132

[12] R. Askey and S. K. Suslov 1993 *The q-harmonic oscillator and an analogue of the Charlier polynomials* J. Phys. A.:Math. Gen. **26** 693–698

[13] N. M. Atakishiyev 1984 *Construction of the dynamical symmetry group of the relativistic harmonic oscillator by the Infeld-Hull factorization method* in *Group Theoretical Methods in Physics* M. Serdaroglu and E. Inonu. (Eds.) 1983 Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag **180** 393–396. Ibid. Theor. Math. Phys. **56** 563–572

[14] N. M. Atakishiyev, A. Frank and K. B. Wolf 1994 *A simple difference realization of the Heisenberg q-algebra* J. Math. Phys. **35** 3253–3260

[15] N. M. Atakishiyev, E. I. Jafarov, S. M. Nagiyev, and K.B. Wolf 1998 *Meixner oscillators* Revista Mexicana de Física **44**(3) 235–244

[16] N. M.Atakishiyev, M. Rahman and S. K. Suslov 1995 *On Classical Orthogonal Polynomials* Constructive Approx. **11** 181–226

[17] N. M. Atakishiyev, M. Rahman and S. K. Suslov 1995 *On Classical Orthogonal Polynomials* Constructive Approximation. **11** 181–226

[18] N. M. Atakishiyev and S. K. Suslov 1991 *Difference analogs of the harmonic oscillator* Theoret. and Math. Phys. **85** 442–444

[19] N. M. Atakishiyev and S. K. Suslov 1991 *A realization of the q-harmonic oscillator* Theoret. and Math. Phys. **87** 15–1062

[20] N. M. Atakishiyev and B. Wolf 1994 *Approximation on a finite set of points through Kravchuk functions* Rev. Mex. Fis. **40** 15–1062

[21] G. A. Baker, JR., P. Graves-Morris 1996 *Padé Approximants* Cambridge University Press

[22] F. Beukers 1979 *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$* Bull. London Math. Soc **11** 268–272

[23] G. Bangerezako 1998 *Discrete Darboux transformation for discrete polynomials of hypergeometric type* J. Phys A: Math. Gen. **31** 2191–2196

[24] G. Bangerezako 1999 *The factorization method for the Askey–Wilson polynomials* J. Comput. Appl. Math. **107** 219–232

[25] C. Berg and A. Ruffing 2001 *Generalized q-Hermite polynomials* Comm. Math. Phys **223** (21) 29–46

[26] L. C. Biedenharn 1989 *The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators* J. Phys. A. **22** L873–L878

[27] S. Bochner 1929 *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme* Math. Zeit. **29** 730–736

[28] P. Borwein 1991 *On the irrationality of* $\sum \frac{1}{q^n + r}$ Number Theory **37** 253–259.

[29] P. Borwein 1992 *On the irrationality of certain series* Proc. Cambridge Philos. Soc. **112** 141–146

[30] J. M. Borwein, P. B. Borwein 1987 *Pi and the AGM - A Study in Analitic Number Theory and Computational Complexity.* Wiley, New York

[31] P. B. Borwein, W. Dykshoorn, T. Erdélyi, J. Zhang *Orthogonality and irrationality* manuscript

[32] P. Borwein and T. Erdélyi 1995 *Polynomials and Polynomials Inequalities* Springer-Verlag, Berlin, New York

[33] C. Brezinski 1980 *"Padé-Type Aproximation and General Orthogonal Polynomials"* Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Stuttgart

[34] G. Darboux, *Théorie des Surfaces.* vol II (Paris, Gauthier-Villars)

[35] P. Erdös 1948 *On arithmetical propierties of Lambert series.* J. Indiana Math. Soc. **12** 63–66

[36] R. Floreanini, J. LeTourneux and L. Vinet 1995 *More on the q-oscillator algebra and q-orthogonal polynomials* J. Phys. A: Math. Gen. **28** 287–293

[37] R. Floreanini and L. Vinet 1991 *q-orthogonal polynomials and the oscillator quantum group* Lett. Math. Phys. **22** 45–54

[38] G. Gasper y M. Rahman 1990 *Basic Hypergeometric Series*. Encyclopedia of Mathematics and its Aplications **35**, Cambridge University Press, Cambridge

[39] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov and V. N. Sorokin 1997 *Hermite–Padé Approximants for systems of Markov–type functions* Sbornik Mathematics **188**:5 33–58

[40] R. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik 1995 *Concrete Mathematics* Addison-Wesley; 2nd. Ed.

[41] G. H. Hardi and E. M. Wright 1979 *Introduction to the Number Theory*. Oxford University Press (5th Edition), Oxford

[42] L. Infeld and T. E. Hull 1951 *The factorization method* Rev. Modern Physics **23** 21–68

[43] R. Koekoek y H. G. Meijer 1993 *A generalization of Laguerre polynomials* SIAM J. Math. Anal. **24** (3) 768–782

[44] R. Koekoek and R. F. Swarttouw 1998 *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.* Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics **No. 98-17** Delft University of Technology, Delft

[45] R. Koekoek, R. F. Swarttouw 1998 *The Askey-scheme of hipergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*. Faculty of technical Mathematics and Informatics Report 98-17, Technical University. Available at
ftp://ftp.twi.tudelf.nl/TWI/publications/tech-reports/1998/DUT-TWI-98-17.ps.gz

[46] A. Lorek and A. Ruffing and J. A. Wess 1997 *A q-deformation of the harmonic oscillator* Z. Phys. C **74** 369–377

[47] M. Lorente *Raising and lowering operators, factorization method and differential/difference operators of hypergeometric type.* J. Phys. A: Math. Gen. **34** (21) 569–588

[48] A. J. Macfarlane 1989 *On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group* $SU_q(2)$ J. Phys. A. **22** 4581–4588

[49] F. Martens 1874 *Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentherorie* Journal für die reine und angerwandte Mathematik **77** 46-62

[50] Tecnical Report *Guide to Standart MATHEMATICA Packages. Version 2.2* (Third Edition 1993 ©by Wolfram Research)

[51] W. Miller (Jr.) 1972 *Symmetry Groups and their applications* Academic Press New York

[52] W. Miller (Jr.) 1969 *Lie theory and difference equations* J. Math. Anal. Appl. **28** 383–399

[53] W. Miller (Jr.) 1970 *Lie theory and q-difference equations* SIAM J. Math. Anal. **1** 171–188

[54] Sh. M. Nagiyev 1995 *Difference Schrödinger equation and q-oscillator model* Theoret. and Math. Phys. **1** 180–187

[55] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov y V. B. Uvarov 1991 *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable* Springer Series in Computational Physics Springer-Verlag, Berlín (Edición en ruso Nauka Moscú 1985)

[56] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov 1993 *Polynomial Solutions of hypergeometric type difference Equations and their classification* Integral Transform. Spec. Funct. **1** 438–462.

[57] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov 1988 *The Special Functions of Mathematical Phisycs.* Birkhäuser Verlag, Basilea

[58] E. M. Nikishin 1980 *On simultaneous Padé approximants* Mat. Sb. **113** 499–519. (Math. USSR Sb. **41** 1982 409–426).

[59] E. M. Nikishin, V. N. Sorokin 1991 *Rational Aproximations and Orthogonality* Amer.Math. Soc. Providence, Rhode Island

[60] E. Schrödinger 1940 *A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions* Proc. Roy. Irish. Acad. **46**A 9–16.

[61] E. Schrödinger 1941 *The factorization of the hypergeometric equation* Proc. Roy. Irish. Acad. **47**A 53–54.

[62] Yu. F. Smirnov 1997 *On factorization and algebraization of difference equation of hypergeometric type* Proc. Internat. Workshop on Orthogonal Polynomials in Mathematical Physics M. Alfaro et al. Eds. Servicio de Publicaciones de la Universidad Carlos III de Madrid 153–161

[63] Yu. F. Smirnov 1998 *Finite difference equations and factorization method* Proc. 5th Wigner Symposium P. Kasperkovitz and D. Grau Eds. World Scientific 148–150

[64] Yu. F. Smirnov 1999 *Factorization method: New aspects* Rev. Mex. Fis. **45** 1–6

[65] V. Spiridonov, L. Vinet, A. Zhedanov 1993 *Difference Schrödinger operators with linear and exponential discrete spectra* Lett. Math. Phys. **29** 63–73

[66] W. Van Assche 1999 *Multiple orthogonal polynomilas, irrationality and trascendence*, Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation (Columbia, MO, 1998), Contemp. Math., 236, Amer. Math. Soc. Providence, RI 325–342.

[67] W. Van Assche 1999 *Little q-Legendre polynomials and irrationality of certain Lambert series*

[68] W. Van Assche 1998 *Special Functions and Differential Equation.* (K. Srinivasa et al.eds.) Allied Publishers, New Delhi 336-355

[69] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk 1992 *Representations of Lie Groups and Special Functions* **Vol. I,II,III** Kluwer Academic Publishers, Dordrecht