El método de Factorización para ecuaciones en diferencias de tipo hipergeométrico

Costas-Santos, Roberto S.

0. Preliminares

$\boxed{1}$ Caso discreto

- Consideraremos red lineal $x(s) = s$,
- SODE: $\tilde{\sigma}\Delta\nabla y(s) + \tilde{\tau}\Delta y(s) + \lambda y(s) = 0$.

0. Preliminares

$\boxed{1}$ Caso discreto

- Consideraremos red lineal $x(s) = s$,
- SODE: $\tilde{\sigma}\Delta\nabla y(s) + \tilde{\tau}\Delta y(s) + \lambda y(s) = 0$.

$\boxed{2}$ Caso q

- Consideraremos red q-lineal $x(s) = q^{\pm s}$,
- SODE:
$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\nabla x_1(s)}\frac{\nabla y(s)_q}{\nabla x(s)} + \tau(s)\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0.$$

Definiciones básicas

- Producto escalar

$$\langle P(s), Q(s)\rangle = \sum_{s=a}^{b-1} P(s)\overline{Q(s)}\rho(s),$$

Definiciones básicas

- Producto escalar

$$\langle P(s), Q(s)\rangle = \sum_{s=a}^{b-1} P(s)\overline{Q(s)}\rho(s),$$

- $A(s)$ función que no se anula en $[a,b]$

$$\Phi_n(s) = \sqrt{\frac{\rho(s)}{d_n^2}} A(s) P_n(s),$$

Definiciones básicas

- Producto escalar

$$\langle P(s), Q(s)\rangle = \sum_{s=a}^{b-1} P(s)\overline{Q(s)}\rho(s),$$

- $A(s)$ función que no se anula en $[a, b]$

$$\Phi_n(s) = \sqrt{\frac{\rho(s)}{d_n^2}} A(s) P_n(s),$$

- Hamiltoniano

$$\mathfrak{H}_q(s) = -\sqrt{\nu(s)}e^{-\partial} - \sqrt{\nu(s+1)}e^{\partial} + \mu(s)I.$$

Álgebra de Lie

Definición: $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Lie si $\mathfrak{A}$ es un álgebra tal que respecto a la aplicación

$$[,]:\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{A},$$

se verifique

$$[X,X]=0 \qquad \forall X\in\mathfrak{A},$$

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

Los 3 problemas

- **Problema 1:** Encontrar $[,]$ y $\mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s)$ tales que
  - $\mathfrak{b}(s)\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{H}(s),$
  - $[\mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s)] = I$.

Los 3 problemas

- **Problema 1:** Encontrar $[,]$ y $\mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s)$ tales que
  - $\mathfrak{b}(s)\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{H}(s),$
  - $[\mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s)] = I$.

- **Problema 2:** Que además, $\mathfrak{a}(s)$ y $\mathfrak{b}(s)$ sean lowering/raising operators.

Los 3 problemas

- **Problema 1:** Encontrar $[,]$ y $\mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s)$ tales que
  - $\mathfrak{b}(s)\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{H}(s),$
  - $[\mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s)] = I$.
- **Problema 2:** Que además, $\mathfrak{a}(s)$ y $\mathfrak{b}(s)$ sean lowering/raising operators.
- **Problema 3:** Encontrar $[,]$ y $\mathfrak{a}(s)$, $\mathfrak{b}(s)$ tales que

$$\mathfrak{A} := \{I, \mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s), \mathfrak{H}(s)\}$$ álgebra de Lie.

Los 3 problemas

- **Problema 1:** Encontrar $[,]$ y $\mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s)$ tales que
  - $\mathfrak{b}(s)\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{H}(s),$
  - $[\mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s)] = I$.
- **Problema 2:** Que además, $\mathfrak{a}(s)$ y $\mathfrak{b}(s)$ sean lowering/raising operators.
- **Problema 3:** Encontrar $[,]$ y $\mathfrak{a}(s)$, $\mathfrak{b}(s)$ tales que

$$\mathfrak{A} := \{I, \mathfrak{a}(s), \mathfrak{b}(s), \mathfrak{H}(s)\}$$ álgebra de Lie.

Más definiciones

1. Dado $\xi \in \mathbb{C}$ el ξ-conmutador

$$[a(s), b(s)]_{\xi} = a(s) \circ b(s) - \xi\, b(s) \circ a(s).$$

Más definiciones

$\boxed{1}$ Dado $\xi \in \mathbb{C}$ el ξ-conmutador

$$[a(s), b(s)]_\xi = a(s) \circ b(s) - \xi\, b(s) \circ a(s).$$

$\boxed{2}$ Los α-operadores

$$\mathfrak{a}_\alpha^{\downarrow}(s) := \frac{A(s)}{\sqrt{\nabla x_1(s)}}\, e^{-\alpha\partial_s} \left(e^{\partial_s} \sqrt{\frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)}} - \sqrt{\frac{\sigma(-s-\mu)}{\Delta x(s)}} \right) \frac{1}{A(s)},$$

$$\mathfrak{a}_\alpha^{\uparrow}(s) := \frac{A(s)}{\nabla x_1(s)} \left(\sqrt{\frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)}} e^{-\partial_s} - \sqrt{\frac{\sigma(-s-\mu)}{\Delta x(s)}} \right) e^{\alpha\partial_s} \frac{\sqrt{\nabla x_1(s)}}{A(s)}.$$

Problema Uno

Teorema 1: El **problema 1** tiene solución sii

- $$\frac{\nabla x(s)}{\nabla x_1(s-\alpha)}\sqrt{\frac{\nabla x_1(s-1)\nabla x_1(s)}{\nabla x(s-\alpha)\Delta x(s-\alpha)}}\sqrt{\frac{\sigma(s-\alpha)\sigma(-s-\mu+\alpha)}{\sigma(s)\sigma(-s-\mu+1)}}=\varsigma$$

- $$\frac{1}{\Delta x(s-\alpha)}\left(\frac{\sigma(s-\alpha+1)}{\nabla x_1(s-\alpha+1)}+\frac{\sigma(-s-\mu+\alpha)}{\nabla x_1(s-\alpha)}\right)$$
$$-\varsigma\frac{1}{\nabla x_1(s)}\left(\frac{\sigma(s)}{\nabla x(s)}+\frac{\sigma(-s-\mu)}{\Delta x(s)}\right)=\Lambda.$$

Problema Dos

Proposición 1 Si $\alpha = 0$, los α-operadores son mutuamente adjuntos.

Problema Dos

Proposición 1 Si $\alpha = 0$, los α-operadores son mutuamente adjuntos.

Proposición 2: Los autovalores han de ser q-lineales.

Problema Tres

Definiendo adecuadamente los operadores para dicho problema, obtenemos las álgebras:

Problema Tres

Definiendo adecuadamente los operadores para dicho problema, obtenemos las álgebras:

- Caso Meixner: obtenemos el álgebra Sp$(2,\Re)$

$$[K_0(s), K_\pm(s)] = \pm K_\pm(s) \text{ and } [K_-(s), K_+(s)]$$
$$K^2(s) = K_0^2(s) - K_0(s) - K_+(s)K_-(s$$

- Caso Kravchuck: obtenemos el álgebra So(3)

$$[K_0(s), K_\pm(s)] = \pm K_\pm(s) \text{ and } [K_-(s), K_+(s)]$$
$$K^2(s) = K_0^2(s) + K_0(s) + K_-(s)K_+(s$$

Al Salam Carlitz I

Para esta familia de P.O., tenemos que

$$\sigma(s)+\tau(s)\nabla x_1(s)=a \stackrel{Teo.1}{\Rightarrow} \alpha=0,\ \xi=q^{-1}.$$

Tomaremos $A(s)=\sqrt{\nabla x_1(s)}$, con esto

$$\nu(s)=a(1-q^s)(1-a\,q^s)q^{s-1/2},\ \mu(s)=a\,q^{2s+1}+(1-q^s)(1-a\,q^s),$$

$$\mathfrak{a}_0^{\downarrow}(s)=\frac{1}{\sqrt{1-q}}\left[\sqrt{a}\,q^{s+1/2}-e^{\partial_s}\sqrt{(1-q^s)(1-a\,q^s)}\right],$$

$$\mathfrak{a}_0^{\uparrow}(s)=\frac{1}{\sqrt{1-q}}\left[\sqrt{a}\,q^{s+1/2}-\sqrt{(1-q^s)(1-a\,q^s)}\,e^{-\partial_s}\right],$$

$$[\mathfrak{a}_0^{\downarrow}(s),\mathfrak{a}_0^{\uparrow}(s)]_{\xi}=1/(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}).$$