La función zeta de Riemann y sus q-extensiones. Aplicaciones

Roberto S. Costas-Santos

0. Referencias

- The theory of Riemann Zeta function.
  Titchmarsh (1951)
- Concrete Mathematics.
  Graham, Knuth, Patashnick (1994)
- Trabajos de Apéry, Borwein, Erdös, Gel'fond, W. Van Assche, etc
- D.E.A. (2005)

1. Motivación

- Propiedades algebraicas de Zeta Riemann (1859)(L-funciones),
- Zeros no triviales (hipótesis de Riemann, hipótesis de Lindelöf),
- Expresión analítica e irracionalidad de $\zeta(2k+1)$,
- Independencia irracional.

2. Teoría de Números

> L-funciones: Grado 1, 2 y clase S (Selberg)+Axiomas.

> $\varphi(n)$, $\mu(n)$, $\Lambda(n)$ Mangoldt , ..

> Función multiplicativa,

> Principio de inversión.

> Polinomios ciclotómicos. Propiedades

> Teorema de los números primos: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

3. Algunas identidades

- $$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s},$$
- $$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$
- $$(1 - 2^{s-1})\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s},$$

$$\zeta(s) = \prod_{p\, primo} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}.$$

4. q-extensiones

- Fixed β, $q \in \mathbb{C}$, $q^\beta \neq 1$, the q^β-number

$$[n;\beta]_q \equiv [n]_{q^\beta} = \frac{q^{n\beta}-1}{q^\beta - 1}.$$

- $(\{\overline{[n;\beta]_q}\}_{n\in\mathbb{Z}}, +, *)$ is a Field, y un DFU.
- $[n;\beta]_q$ is q-**prime** iff exists an irreducible polynomial $f \in \mathbb{Z}[x]$: $[n;\beta]_q = f(q^\beta)$.

  And is q-**composite** in other case.

4. $\zeta(\mathbb{Z})$. Identidades

- $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s).$
- $\zeta(2n)$.
- **New Function:** Let n be a positive integer,

$$\zeta_\Phi(n) = \prod_{p \text{ prime}} [\Phi_1^{\mu(n)}(1/p)\Phi_n^{-1}(1/p)].$$

- $\zeta(n) = \prod_{t|n} \zeta_\Phi(t) \Rightarrow \prod_{1\neq k|n} (\zeta(k))^{\mu(n/k)} = \zeta_\Phi(n).$

5. Hipótesis de Riemann

- (RH): $\zeta(\frac{1}{2}+it) = \mathcal{O}(|t|^{\epsilon}), \quad \epsilon <<$.
- (RH) $\iff \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = x + \mathcal{O}(\sqrt{x}), \quad x >>$.
- $\sum_{n\leq N} \Lambda(n) = \log(mcm(1,2,\ldots,N))$.
- Definimos r_n, u_n y d_n.
- $d_{n+1} r_{n+1}^{\frac{1}{2}} - u_n (r_{n+1} - 1)^{\frac{1}{2}} = \log(p(r_{n+1})) - 1$.