Universidad Loyola – `Convocatoria ordinaria. Temas 1 y 2`

Titulación: ______________________

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **17/12/2025**

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________________

INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora avanzada.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. $\langle$3 puntos$\rangle$ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^{-1}.

b) Obtenga los valores de α para los cuales $2A^{-1} + B^T - \alpha\mathbb{I}_3$ es singular.

Ejercicio 2. $\langle$3 puntos$\rangle$ Dado el sistema de ecuaciones homogéneo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} .$$

a) Halle el sistema de ecuaciones equivalente en forma escalonada reducida.

b) Clasifique el sistema de ecuaciones aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius.

c) Encuentre (si existen) la solución o soluciones del sistema.

Ejercicio 3. $\langle$2 puntos$\rangle$ Una empresa produce tres productos A, B y C, que procesa en tres máquinas. El tiempo en horas requerido para procesar una unidad de cada producto por las tres máquinas está dado por:

	A	B	C
Máquina I	3	5	4
Máquina II	6	4	1
Máquina III	6	1	6

Se dispone de la máquina I por 1521 horas, de la máquina II por 1032 horas y de la máquina III por 1812 horas.

a) Formule el sistema de ecuaciones lineales.

b) Determine las cantidades que puede producir de cada producto con objeto de emplear todo el tiempo disponible las máquinas.

Ejercicio 4. $\langle$2 puntos$\rangle$

a) Sabiendo que A cumple la condición ($A^T = A^{-1}$), simplique la expresión matricial siguiente:

$$A^T(A + \mathbb{I}) - A^{-1}.$$

b) Resuelva las siguiente ecuación matricial e indique las condición que se ha de cumplir para que sea posible resolverla (suponga que las matrices son cuadradas del mismo orden):

$$B(X + A) - (X - BA) = 3BA - 2X.$$

Universidad Loyola – `Convocatoria ordinaria. Temas 3 y 4`

Titulación: ____________________________

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero** Fecha: **17/12/2025**

Apellidos: ________________________	Nombre: ________________

INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora avanzada.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

Ejercicio 1. $\langle$1'5 puntos$\rangle$ Estudie si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:

$$a)\ S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad b)\ S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad c)\ S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejercicio 2. $\langle$2 puntos$\rangle$ Consideremos los siguientes vectores del plano:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con ellos construimos las bases $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2\}$, y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$. Se pide:

a) Calcule la matriz P del cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

b) Obtenga las coordenadas del vector $\vec{v} = (5, 3)^T$ con respecto a ambas bases.

Ejercicio 3. $\langle$2 puntos$\rangle$ Deseamos encontrar un vector $\vec{x}$ que sea ortogonal al subespacio S generado por los vectores $(-1, 1, 2)^T$ y $(1, 0, -2)^T$. Para obtenerlo, se pide:

a) Obtenga las ecuaciones que dicho vector $\vec{x}$ debe satisfacer.

b) Utilize las ecuaciones del apartado anterior, para calcular un vector unitario unitario que sea ortogonal al subespacio S generado por los vectores $(-1, 1, 2)^T$ y $(1, 0, -2)^T$.

Ejercicio 4. $\langle$1'5 puntos$\rangle$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Halle los valores propios (autovalores) y vectores propios (autovectores) de A.

b) ¿Es la matriz diagonalizable? Justifique su respuesta.

c) Obtenga los vectores no nulos del plano que queden fijo al aplicarle la transformación dada por la matriz A.

Ejercicio 5. $\langle$3 puntos$\rangle$ Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $\langle$1'5 puntos$\rangle$ Calcule los valores propios y vectores propios de B.

b) $\langle$0'5 puntos$\rangle$ ¿Es la matriz B diagonalizable? Justifique su respuesta. En caso afirmativo, encuentre la matriz de paso P y la matriz diagonal D correspondiente. Escriba la relación existente entre las matrices B, P y D.

c) $\langle$1 punto$\rangle$ Utilice la diagonalización de la matriz B para hallar una expresión para B^n (la potencia n-ésima de la matriz B).