



Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

### INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora avanzada.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

**Ejercicio 1.** <3 puntos> Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Calcule  $A^{-1}$ .
- Obtenga los valores de  $\alpha$  para los cuales  $3A^{-1} + B - \alpha\mathbb{I}_3$  es singular.

**Ejercicio 2.** <3 puntos> Dado el sistema de ecuaciones homogéneo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

- Halle el sistema de ecuaciones equivalente en forma escalonada reducida.
- Indique el rango de la matriz de coeficientes, el rango de la matriz ampliada, y empleando esto clasifique el sistema de ecuaciones aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius.
- Encuentre (si existen) la solución o soluciones del sistema.

**Ejercicio 3.** <2 puntos> Una empresa produce tres productos A, B y C, que procesa en tres máquinas. El tiempo en horas requerido para procesar una unidad de cada producto por las tres máquinas está dado por:

|             | A | B | C |
|-------------|---|---|---|
| Máquina I   | 5 | 4 | 3 |
| Máquina II  | 4 | 1 | 6 |
| Máquina III | 1 | 6 | 6 |

Se dispone de la máquina I por 1909 horas, de la máquina II por 1860 horas y de la máquina III por 2377 horas.

- Formule el sistema de ecuaciones lineales.
- Determine las cantidades que puede producir de cada producto con objeto de emplear todo el tiempo disponible las máquinas.

**Ejercicio 4.** <2 puntos>

- Indique 3 matrices que conmuten con una matriz cuadrada  $C$ .

- b) Resuelva la siguiente ecuación matricial e indique las condición que se ha de cumplir para que sea posible resolverla (suponga que las matrices son cuadradas del mismo orden):

$$B(2A + X) - (X - BA) = 5BA + 2X.$$



**Universidad Loyola** – Convocatoria extraordinaria. Temas 3 y 4

Titulación: \_\_\_\_\_

Asignatura: **Álgebra/Matemáticas I**

Curso: **primero**

Fecha: **23/01/2026**

Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

### INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora avanzada.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

**Ejercicio 1.** (1'5 puntos) Estudie si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:

$$a) S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, \quad b) S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, \quad c) S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Ejercicio 2.** (2 puntos) Consideremos los siguientes vectores del plano:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Con ellos construimos las bases  $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ , y  $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ . Se pide:

- Calcule la matriz  $P$  del cambio de base de  $\mathcal{B}_1$  a  $\mathcal{B}_2$ .
- Obtenga las coordenadas del vector  $\vec{v} = (2, 1)^T$  con respecto a ambas bases.

**Ejercicio 3.** (2 puntos) Deseamos encontrar un vector  $\vec{x}$  que sea ortogonal al subespacio  $S$  generado por los vectores  $(0, 4, 3)^T$  y  $(1, 0, 0)^T$ . Para obtenerlo, se pide:

- Obtenga las ecuaciones que dicho vector  $\vec{x}$  debe satisfacer.
- Utilice las ecuaciones del apartado anterior, para calcular un vector unitario que sea ortogonal al subespacio  $S$  generado por los vectores  $(0, 4, 3)^T$  y  $(1, 0, 0)^T$ .

**Ejercicio 4.** (1'5 puntos) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ .

- Halle los valores propios (autovalores) y vectores propios (autovectores) de  $A$ .
- ¿Es la matriz diagonalizable? Justifique su respuesta.
- Indique si existen vectores, no nulos, del plano que queden fijos al aplicarle la transformación dada por la matriz  $A$ . Justifique su respuesta.

**Ejercicio 5.**  $\langle 3 \text{ puntos} \rangle$  Dada la matriz  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- $a)$   $\langle 1'5 \text{ puntos} \rangle$  Calcule los valores propios y vectores propios de  $B$ .
- $b)$   $\langle 0'5 \text{ puntos} \rangle$  ¿Es la matriz  $B$  diagonalizable? Justifique su respuesta. En caso afirmativo, encuentre la matriz de paso  $P$  y la matriz diagonal  $D$  correspondiente. Escriba la relación existente entre las matrices  $B$ ,  $P$  y  $D$ .
- $c)$   $\langle 1 \text{ punto} \rangle$  Utilice la diagonalización de la matriz  $B$  para hallar una expresión para  $B^n$  (la potencia  $n$ -ésima de la matriz  $B$ ).