



Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombre: \_\_\_\_\_

### INSTRUCCIONES

- En este examen no está permitido el uso de calculadora avanzada.
- Cada ejercicio requiere de una breve explicación indicando el método empleado y parte del desarrollo realizado.
- Cada hoja entregada debe contener tu nombre completo en la parte superior de la misma.

**Ejercicio 1.** (3 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Demuestre que la matriz  $A^T A$  es regular y calcule su inversa.
- Determine los valores de  $\alpha$  para los cuales la matriz  $AA^T - \alpha \mathbb{I}_3$  es regular.
- Sea  $B$  la matriz  $B = (A^T A)^{-1} A^T$ . Calcule  $AB$ .

**Ejercicio 2.** (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 12 \end{aligned} \right\}$$

- Halle el sistema de ecuaciones equivalente en forma **escalonada reducida**.
- Aplique el Teorema de Rouché-Frobenius para clasificar el sistema de ecuaciones.
- Encuentre (si existen) la solución o soluciones del sistema.

**Ejercicio 3.** (2 puntos) En una empresa textil se fabrican tres tipos de camisetas. En la tabla adjunta se resumen las necesidades de horas de trabajo y materias primas necesarias para fabricar una unidad de cada camiseta. Cada mes se cuenta con un total de 1810 horas de trabajo y 4220 kilos de materias primas. Por otra parte, se necesita producir un total de 350 unidades mensuales.

|                                 | Camiseta |    |    |
|---------------------------------|----------|----|----|
|                                 | A        | B  | C  |
| Horas de trabajo/unidad         | 3        | 5  | 7  |
| Kilos de materias primas/unidad | 12       | 10 | 14 |

- Formule el sistema de ecuaciones lineales asociado al problema descrito previamente.
- Escriba la ecuación matricial del sistema de ecuaciones y demuestre que el problema considerado tiene solución única.
- Determine las cantidades que puede producir de cada camiseta sabiendo que se aprovechan al máximo las disponibilidades mensuales de trabajo y de materias primas.

**Ejercicio 4.** (1 punto) Aplique las propiedades de las operaciones entre matrices para simplificar las siguientes expresiones matriciales (suponga que las matrices son cuadradas del mismo orden):

$$X(X^{-1} + \mathbb{I}) + (\mathbb{I} - X^T)^T.$$

**Ejercicio 5.** (1 punto) Resuelva la siguiente ecuación matricial e indique las condiciones que se han de cumplir para que sea posible resolverla (suponga que las matrices son cuadradas y del mismo orden):

$$X - A(X - A) = B - BX.$$