

Introducción

En esta práctica veremos una de las numerosas aplicaciones de la diagonalización de matrices. Comenzamos planteando el siguiente problema:

Problema.

Dos marcas A y B se distribuyen el mercado de un determinado producto. La relación entre las cantidades x e y consumidas de cada marca en el periodo $t + 1$ en relación con las consumidas en el periodo anterior t vienen dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} x_{t+1} &= 0.95x_t + 0.03y_t \\ y_{t+1} &= 0.05x_t + 0.97y_t \end{aligned} \right\}.$$

Las cantidades consumidas de cada marca en el instante inicial $t = 0$ vienen dadas por $x_0 = 500$, $y_0 = 500$. Nuestro objetivo es saber si las cantidades consumidas de cada marca llegarán a estabilizarse con el tiempo y, en caso afirmativo, hallar estas cantidades. Este tipo de problemas se denominan “sistemas dinámicos” y el álgebra lineal, concretamente la diagonalización de matrices que hemos aprendido en este tema, es una herramienta para resolverlos.

Procedemos de la siguiente forma:

Paso 1. Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix},$$

El problema planteado es equivalente a encontrar un vector no nulo $\vec{v}_0$ que no cambie cuando es transformado por la matriz A . Es decir: $A\vec{v}_0 = \vec{v}_0$.

Usando el lenguaje y los conceptos aprendidos en el tema, esto es equivalente a encontrar un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$.

Paso 2. A continuación, diagonalizamos la matriz A y encontramos sus valores y vectores propios asociados. La matriz A es una matriz estocástica (ver la práctica 2) ya que sus coeficientes están entre 0 y 1 y las columnas suman 1.

Las matrices estocásticas tienen una propiedad muy interesante: “siempre uno de sus valores propios es igual a 1”. Como las columnas han de sumar 1 es fácil comprobar que $|A - \mathbb{I}| = 0$ y por tanto $\lambda = 1$ es un valor propio.

Usando **Wolfram Alfa**¹ tenemos que los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.92$ y los vectores propios asociados a cada valor propio son

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución que buscamos ha de ser un vector proporcional al vector propio $\vec{v}_1$ asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$, es decir

$$\vec{v}_0 = \alpha \vec{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¹Usar la instrucción eigenvector en **Wolfram Alfa** para obtener los valores propios y vectores propios de la matriz.

Solo nos queda por tanto calcular la constante de proporcionalidad α .

Paso 3. La solución final buscada se obtiene teniendo en cuenta que el número total de consumidores es 1000, por tanto:

$$0.6\alpha + \alpha = 1000,$$

de donde $\alpha = 625$ y

$$\vec{v}_0 = \alpha \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \end{pmatrix} = 625 \begin{pmatrix} 0.6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 625 \end{pmatrix}.$$

Las cuotas de mercado de cada marca se estabilizan por tanto en los valores siguientes: 375 para la primera marca y 625 para la segunda.

Observación: Potencia n -ésima de la matriz.

Otra forma de abordar el problema es la siguiente.

A partir de la matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}$$

y el valor de la cuota inicial

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix},$$

las cantidades consumidas por cada marca pasados n periodos de tiempo están dados por:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Observemos que determinar qué ocurrirá a largo plazo es equivalente a estudiar el valor de la expresión anterior para valores de n cada vez más grandes. Formalmente equivale a estudiar a calcular el valor de la expresión anterior cuando $n \rightarrow \infty$. Por otra parte, sabemos que al ser la matriz A diagonalizable es posible encontrar una expresión para la potencia n -ésima A^n :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 0.6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0.6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.92^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Si el valor de n se va haciendo cada vez mayor, resulta que 0.92^n tiende a 0 y entonces:

$$\begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}^n \rightarrow \begin{pmatrix} 0.6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.375 & 0.375 \\ 0.625 & 0.625 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, a largo plazo, las cantidades consumidas de cada marca se estabilizan:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.375 & 0.375 \\ 0.625 & 0.625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 625 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO PROPUESTO.

Tres marcas A , B y C se distribuyen el mercado de un determinado producto. La relación entre las cantidades x , y , z consumidas de cada marca en el periodo $t + 1$ en relación con las consumidas en el periodo anterior t vienen dadas por las ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} x_{t+1} &= 0.60x_t + 0.1y_t + 0.3z_t \\ y_{t+1} &= 0.10x_t + 0.7y_t + 0.1z_t \\ z_{t+1} &= 0.30x_t + 0.2y_t + 0.6z_t \end{aligned} \right\}$$

Las cuotas de mercado de cada marca en el instante inicial $t = 0$ vienen dadas por $x_0 = 1000$, $y_0 = 2000$, $z_0 = 3000$.

Parte 1.

- Escriba el sistema de ecuaciones en forma matricial.
- Encuentre los valores y vectores propios asociados de la matriz de transición.
- Determine el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$.
- Sabiendo que las cantidades consumidas de cada marca inicialmente son $x_0 = 1000$, $y_0 = 2000$, $z_0 = 3000$ encuentre las cantidades consumidas de cada marca a largo plazo.

Parte 2.

- Justifique que la matriz de transición es diagonalizable. Indique la matriz diagonal y de paso correspondiente.
- Usando la diagonalización realizada encuentre la expresión de la potencia n -ésima de la matriz de transición.
- A partir de la potencia n -ésima de la matriz de transición determine el valor de las cantidades consumidas de cada marca a largo plazo.
- Tome diferentes valores para las cuotas iniciales de mercado (tenga en cuenta que la suma total ha de ser la misma, en este caso 6000 unidades), por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 2500 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 500 \\ 3000 \\ 1500 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2730 \\ 1470 \\ 1800 \end{pmatrix},$$

y observe lo que ocurre. ¿Se obtiene la misma solución a largo plazo? ¿Depende la solución final de la condición inicial? Justifique su respuesta.

RÚBRICA PARA LA CORRECCIÓN DE LA PRÁCTICA:

Para la corrección de la práctica se seguirán los siguientes criterios:

Los resultados de los apartados de la práctica (7 puntos).

La presentación de los resultados de la práctica (3 puntos).

La práctica se presentará en formato .pdf en un documento paginado con una portada indicando el título de la práctica y el nombre y apellidos del estudiante.

Los resultados se presentarán de forma clara, siguiendo el orden los apartados de la práctica y respondiéndolos de manera precisa.